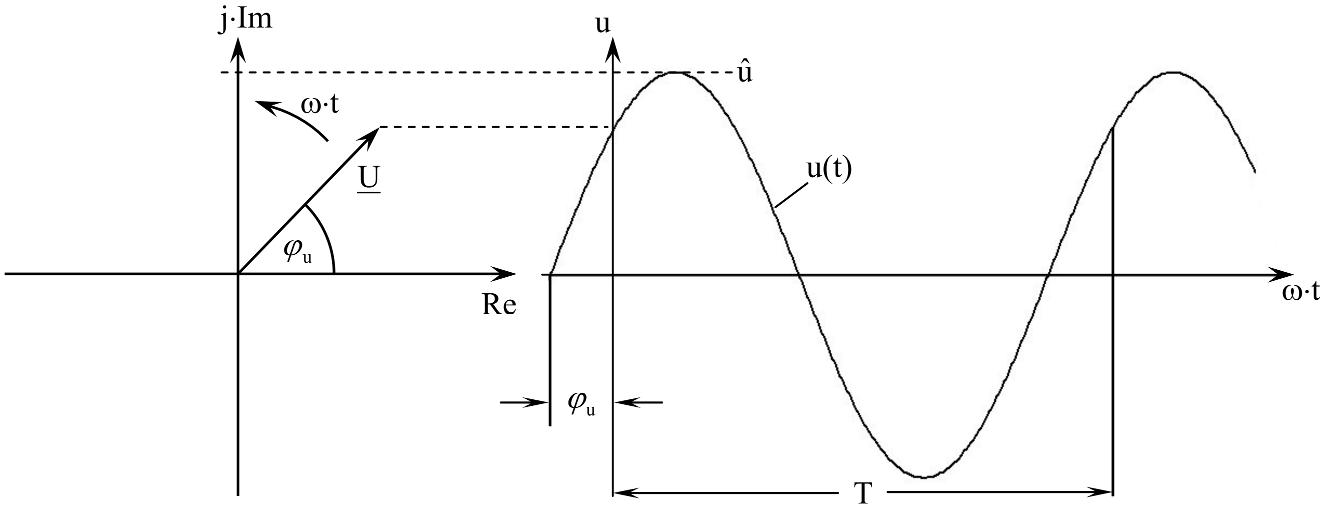
Das folgende Kapitel betrachtet die Eigenschaften und das Verhalten der Bauteile im Bereich der Wechselspannung. Damit ist, wenn auch nicht explizit aufgeführt, gleichzeitig der Wechselstrom gemeint.
Bei Gleichspannung sind Spannung und Strom zeitlich konstant. Das heißt, die Elektronen bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit in eine Richtung im Leiter. Wechselgrößen sind dadurch gekennzeichnet, dass sie periodisch mit immer gleicher Form die Richtung wechseln und dass die Flächenanteile der positiven und negativen Flächenabschnitte gleich groß sind (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.2.1. Signalformen, Skript 1997).
Eine Sinuskurve ist durch drei Punkte eindeutig gekennzeichnet: Amplitude, Frequenz und Phasenlage sind die Kriterien zur eindeutigen Festlegung einer Wechselspannung (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.2.2. Sinusförmige Wechselspannung, Merkmale, Skript 1997).
Die Darstellung von Wechselgrößen in reellen Organigrammen ist zeichnerisch ein umständliches Verfahren. Mit Hilfe der komplexen Rechnung lassen sich alle sinusförmigen Wechselgrößen in einfacher Weise symbolisch in Form von Zeigern darstellen (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.2.5. Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen im Zeigerbild, Einzelne Wechselgrößen, Skript 1997). Auf die komplexe Rechnung wird an dieser Stelle nicht näher eingegangen, hier wird auf die Mathematik-Vorlesung, Bücher oder die Ausarbeitung über komplexe Zahlen von Gregor Danielak verwiesen.



Zeigerdiagramm

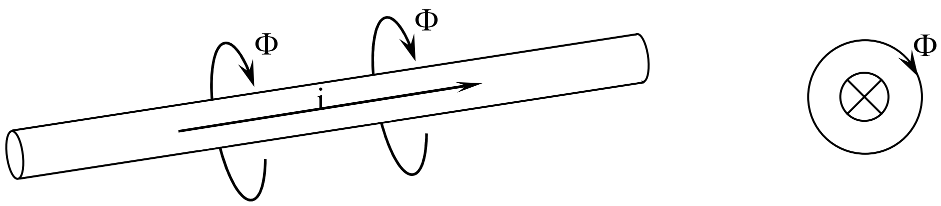
$$\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j(\omega \cdot t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U} = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega \cdot t}$$

Zeitdiagramm

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_u)$$

Die Spannung u im oberen Beispiel ist voreilend, dies wird durch das $+\varphi_u$ im Argument deutlich. Die Sinuskurve beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ nicht im Nullpunkt, sondern hat bereits den Wert $u(0) = \hat{u} \cdot \sin(\varphi_u)$ bzw. $\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$.
Bei einer nacheilenden Sinusspannung (bzw. Sinusfunktion) wäre die Phasenverschiebung φ_u negativ.
Im Zeigerdiagramm bewegt sich der Zeiger entgegen des Uhrzeigersinns mit der Geschwindigkeit ω·t. Man sieht auch hier, dass er zum Zeitpunkt $t = 0$ ungleich Null ist, sonst würde er zu diesem Zeitpunkt auf der reellen Achse liegen. Das bedeutet: Alles, was voreilt, liegt im Zeigerdiagramm weiter „links“, alles, was nacheilt, liegt weiter „rechts“; bezogen auf die Richtung von ω·t im Zeiger- und Zeitdiagramm.

Jeder stromdurchflossene Leiter erzeugt in seiner unmittelbaren Umgebung ein Magnetfeld. Dieses hängt von der Richtung und Stärke des Stromes ab. Man hat vereinbart, dass die Feldlinien des Magnetfelds den stromdurchflossenen Leiter im Sinne einer Rechtsschraube in Stromrichtung umschließen. Weiterhin wurde vereinbart, dass die Feldlinien am Nordpol aus- und am Südpol wieder eintreten (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 2.1.2. Felddarstellung, Skript 1997).



Wickelt man diesen Leiter zu einer Leiterschlaufe, so erhält man eine Induktivität (Spule). Diese ist – genau wie die Kapazität – ein Energiespeicher. Sobald sie vom Strom durchflossen wird, baut sie ein Magnetfeld auf. Reißt der Stromfluss ab, dann sorgt die gespeicherte Energie im Magnetfeld dafür, dass der Stromfluss in die gleiche Richtung für eine gewisse Zeit erhalten bleibt. Die Induktivität dient damit praktisch als Quelle.
Ein allgemeiner Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an der Induktivität wird durch das Induktionsgesetz 1. Form beschrieben: $u_L = -N \cdot \frac{d\Phi}{dt}$. Dabei ist N die Anzahl der Windungen, $\frac{d\Phi}{dt}$ ist die Änderung des magnetischen Flusses nach der Zeit. Das Minuszeichen in dieser Gleichung kommt daher, weil die Spannung u_L so gerichtet ist, dass der daraus resultierende Fluss dem ursprünglichen Fluss entgegengesetzt ist (Lenz'sche Regel).
Im elektrischen Kreis gilt nach dem ohmschen Gesetz $u = i \cdot R$, im magnetischen Kreis existiert eine analoge Gleichung: $\Theta = \Phi \cdot R_m$ (mit Θ = magnetische Spannung, Φ = magnetischer Fluss, R_m = magnetischer Widerstand). Nach Φ aufgelöst ergibt sich:

$$\begin{aligned} &\Theta = \Phi \cdot R_m \\ \Leftrightarrow\ & i_L \cdot N = \Phi \cdot R_m \\ \Leftrightarrow\ & \Phi = \frac{i_L \cdot N}{R_m} \end{aligned}$$

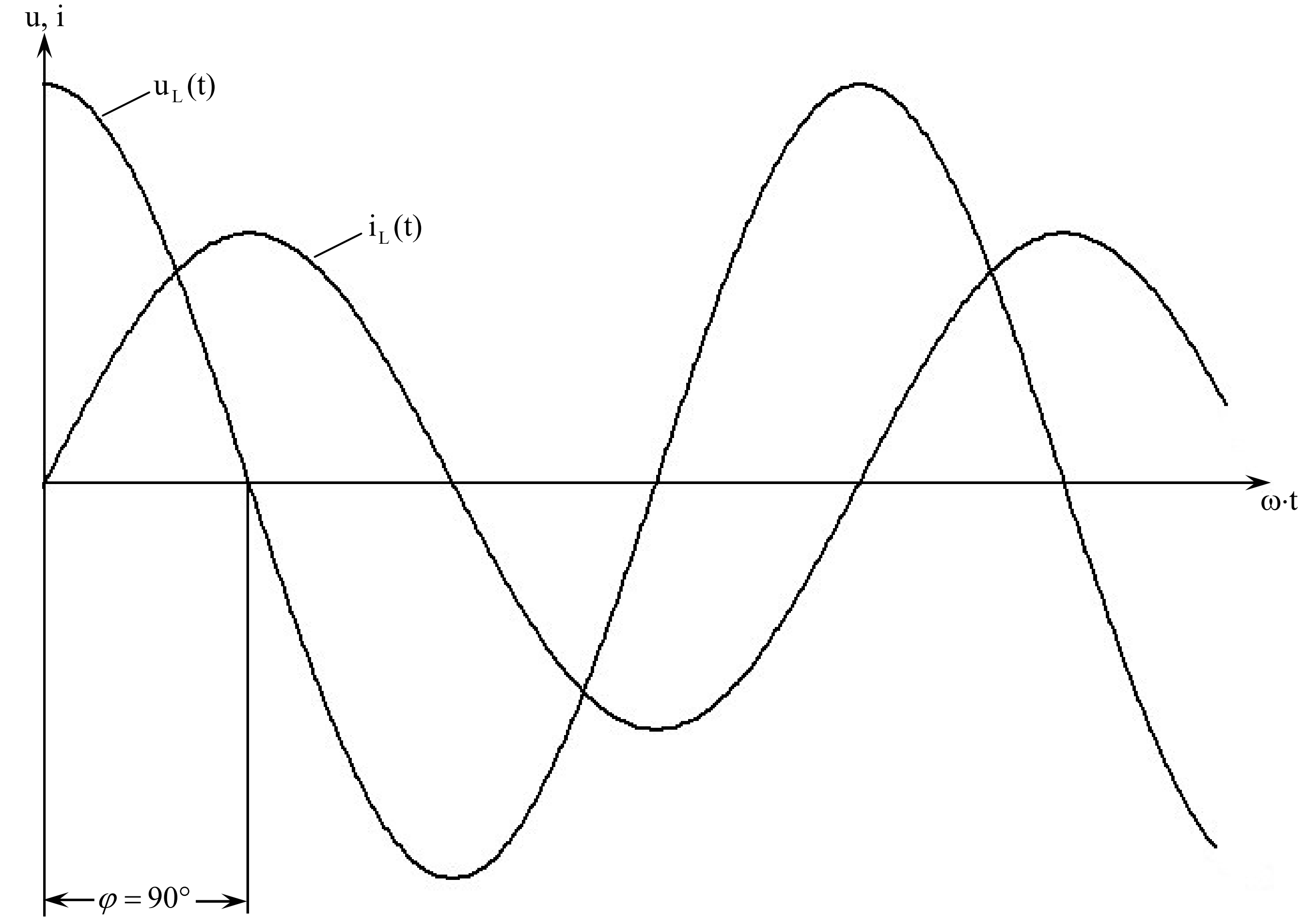
Setzt man diese Gleichung für Φ in das Induktionsgesetz 1. Form ein, so erhält man das Induktionsgesetz 2. Form:

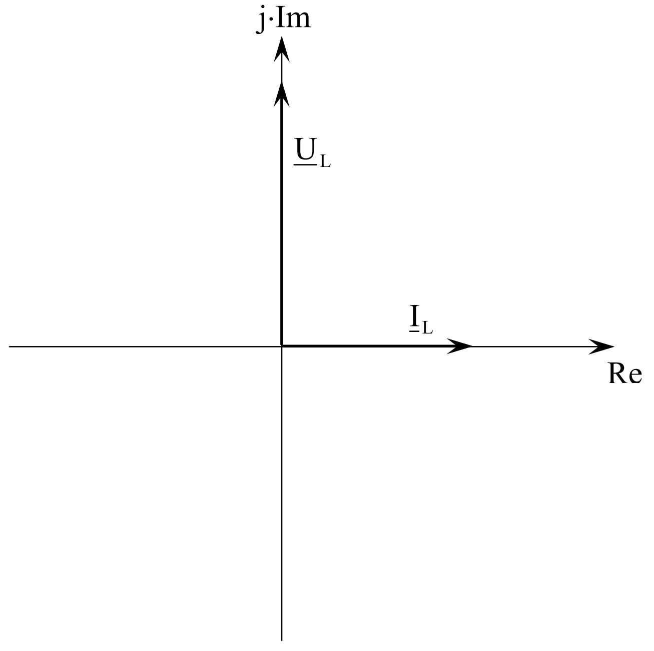
$$u_L = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = N \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{i_L \cdot N}{R_m}\right) = \frac{N^2}{R_m} \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{di_L}{dt}\text{, also } u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt}\text{; Induktionsgesetz 2. Form}$$

Weil man hier nur die Beträge heranzieht, ist auf das Minuszeichen für diese Berechnung verzichtet worden. Setzt man in das Induktionsgesetz 2. Form einen sinusförmigen Strom ein, erhält man folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} & u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\hat{i}_L \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) = \hat{i}_L \cdot L \cdot \frac{d}{dt}\left(\sin(\omega \cdot t)\right) = \hat{i}_L \cdot \omega \cdot L \cdot \cos(\omega \cdot t) \\ \Leftrightarrow\ & u_L = \hat{u}_L \cdot \cos(\omega \cdot t) = \hat{u}_L \cdot \sin(\omega \cdot t + 90°) \end{aligned}$$

Es gilt also $i_L = \hat{i}_L \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $u_L = \hat{u}_L \cdot \sin(\omega \cdot t + 90°)$. Das bedeutet, dass die Spannung u_L dem Strom i_L um 90° voreilt.

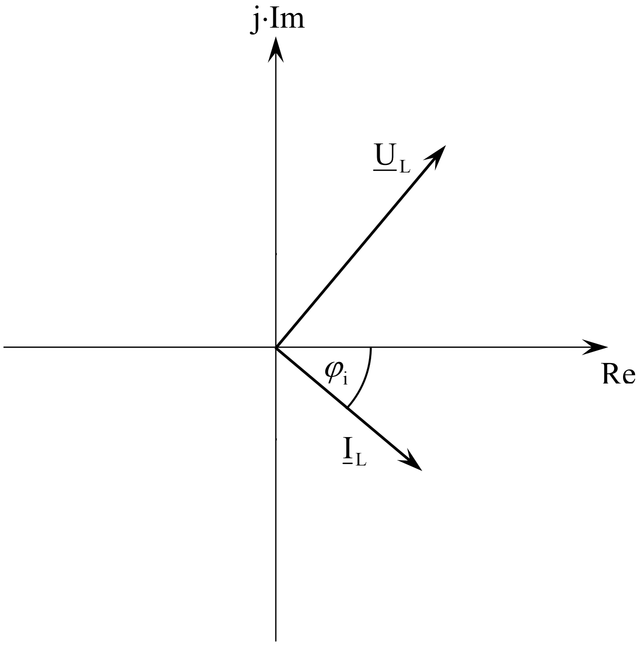




Die Gleichung im Zeigerdiagramm für den Strom $\underline{I}_L$ lautet: $\underline{I}_L = \hat{i}_L \cdot e^{j\omega \cdot t}$, für die Spannung $\underline{U}_L$: $\underline{U}_L = \hat{u}_L \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)}$. Im Zeigerdiagramm sieht man ganz deutlich, dass die Spannung dem Strom um 90° voreilt.

$$\underline{U}_L = L \cdot \frac{d\underline{I}_L}{dt} = L \cdot \frac{d}{dt}\left(\hat{i}_L \cdot e^{j\omega \cdot t}\right) = \hat{i}_L \cdot L \cdot \frac{d}{dt} e^{j\omega \cdot t}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U}_L = \hat{i}_L \cdot j\omega \cdot L \cdot e^{j\omega \cdot t} = \hat{i}_L \cdot \omega \cdot L \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U}_L = \hat{u}_L \cdot e^{j(\omega \cdot t + 90°)}$$

(Das j bedeutet eine Phasenverschiebung um +90°: $j = 1 \cdot e^{j90°}$)



Das gleiche Ergebnis – also ein Voreilen der Spannung $\underline{U}_L$ zum Strom $\underline{I}_L$ um 90° – erhält man ebenfalls, wenn der Strom eine beliebige Phasenverschiebung φ_i zum Zeitpunkt $t=0$ besitzt (hier im linken Zeigerdiagramm ist $\varphi_i < 0$): $\underline{I}_L = \hat{i}_L \cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi_i)} = \hat{i}_L \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega\cdot t}$

$$\underline{U}_L = L\cdot\frac{d\underline{I}_L}{dt} = L\cdot\frac{d}{dt}\left(\hat{i}_L \cdot e^{j\varphi_i}\cdot e^{j\omega\cdot t}\right)$$
$$= \hat{i}_L \cdot e^{j\varphi_i}\cdot L\cdot\frac{d}{dt}e^{j\omega\cdot t} = \hat{i}_L \cdot e^{j\varphi_i}\cdot j\omega\cdot L\cdot e^{j\omega\cdot t}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U}_L = j\omega\cdot L\cdot\underbrace{\hat{i}_L \cdot e^{j\varphi_i}\cdot e^{j\omega\cdot t}}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U}_L = j\omega\cdot L\cdot \quad \underline{I}_L$$

In dieser Gleichung taucht der Strom $\underline{I}_L$ in der ursprünglichen Form auf. Das j impliziert die Phasenverschiebung um +90° (voreilend):

$$\underline{U}_L = j\omega\cdot L\cdot\hat{i}_L\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi_i)} = \omega\cdot L\cdot\hat{i}_L\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi_i+90°)}$$
$$\Leftrightarrow \underline{U}_L = \hat{u}_L\cdot e^{j(\omega\cdot t+\varphi_i+90°)}$$

Der komplexe Scheinwiderstand berechnet sich aus der Gleichung $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. Für die Induktivität ergibt sich:

$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_L} = \frac{\hat{u}_L\cdot e^{j(\omega\cdot t+90°)}}{\hat{i}_L\cdot e^{j\omega\cdot t}} = \frac{\hat{i}_L\cdot\omega\cdot L\cdot e^{j\omega\cdot t}\cdot e^{j90°}}{\hat{i}_L\cdot e^{j\omega\cdot t}} = \omega\cdot L\cdot e^{j90°} = j\omega\cdot L = j\cdot X_L$, also gilt für X_L: $X_L = \omega\cdot L = 2\cdot\pi\cdot f\cdot L$.

Das gleiche erhält man ebenfalls nach der Division von $\hat{u}_L$ durch $\hat{i}_L$:

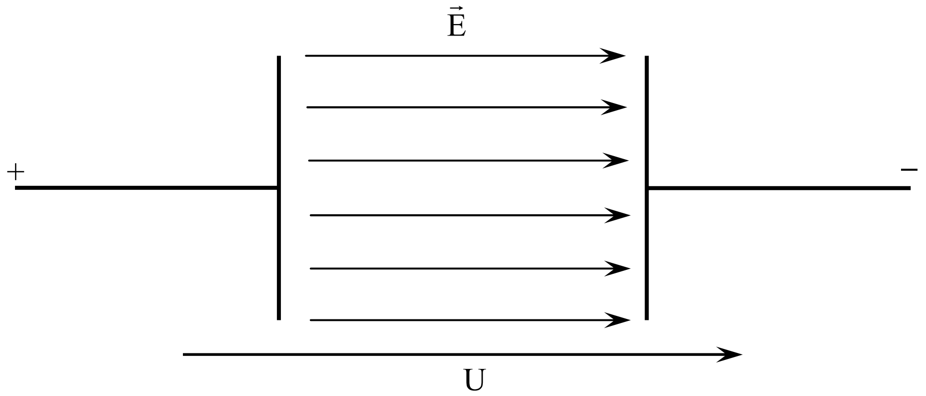
$$\frac{\hat{u}_L}{\hat{i}_L} = \frac{\hat{i}_L\cdot\omega\cdot L}{\hat{i}_L} = \omega\cdot L = X_L$$

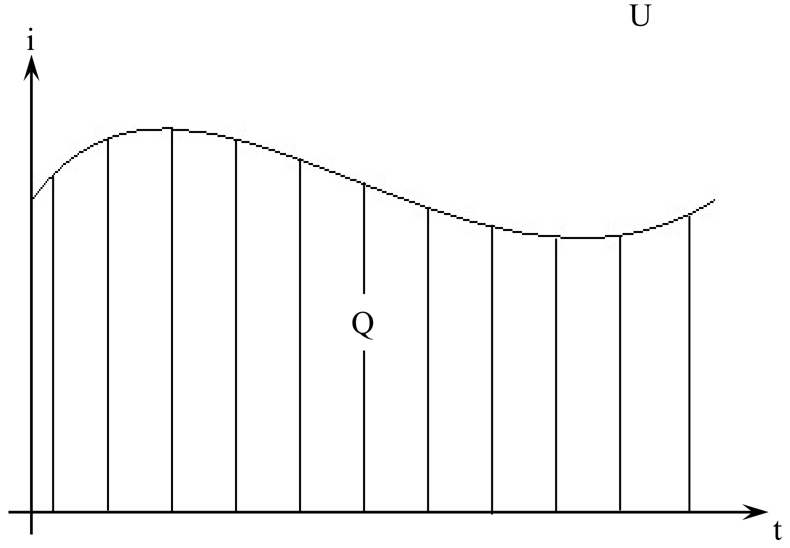
Weil ebenfalls gilt $\hat{u}_L = u_{L_{eff}}\cdot\sqrt{2}$ und $\hat{i}_L = i_{L_{eff}}\cdot\sqrt{2}$ kann man auch schreiben:

$$\frac{\hat{u}_L}{\hat{i}_L} = \frac{u_{L_{eff}}\cdot\sqrt{2}}{i_{L_{eff}}\cdot\sqrt{2}} = \frac{u_{L_{eff}}}{i_{L_{eff}}} = \frac{i_{L_{eff}}\cdot\omega\cdot L\cdot\sqrt{2}}{i_{L_{eff}}\cdot\sqrt{2}} = \omega\cdot L = X_L$$

Eine Kapazität (Kondensator) besteht prinzipiell aus zwei elektrisch leitfähigen Flächen (Elektroden), die durch einen Isolator (Dielektrikum) voneinander getrennt sind. Sie kann Ladung speichern, indem sich die Elektronen auf einer Elektrode sammeln. Dadurch wird das elektrische Feld $\vec{E}$ aufgebaut. Die Kapazität als Maß für das Speichervermögen des Kondensators gibt an, wie viel Ladung Q (sprich Elektronen) pro Spannungseinheit U gespeichert werden kann (Hering, Bressler, Gutekunst: Elektronik für Ingenieure, Kap. 2.3. Kondensatoren, Springer-Verlag 1998, 3. Auflage). Es gilt demzufolge: $C = \frac{Q}{U}$.

Reißt der Stromfluss ab, so fließen die Elektronen – sofern möglich – von der einen Elektrode zur anderen ab. Das Feld wird dabei abgebaut. Ist der Stromfluss in die entgegen gesetzte Richtung nicht möglich, so bleiben die Elektronen so lange gespeichert (Energiespeicher), bis die Möglichkeit zum Potentialausgleich zwischen den beiden Elektroden gegeben wird.



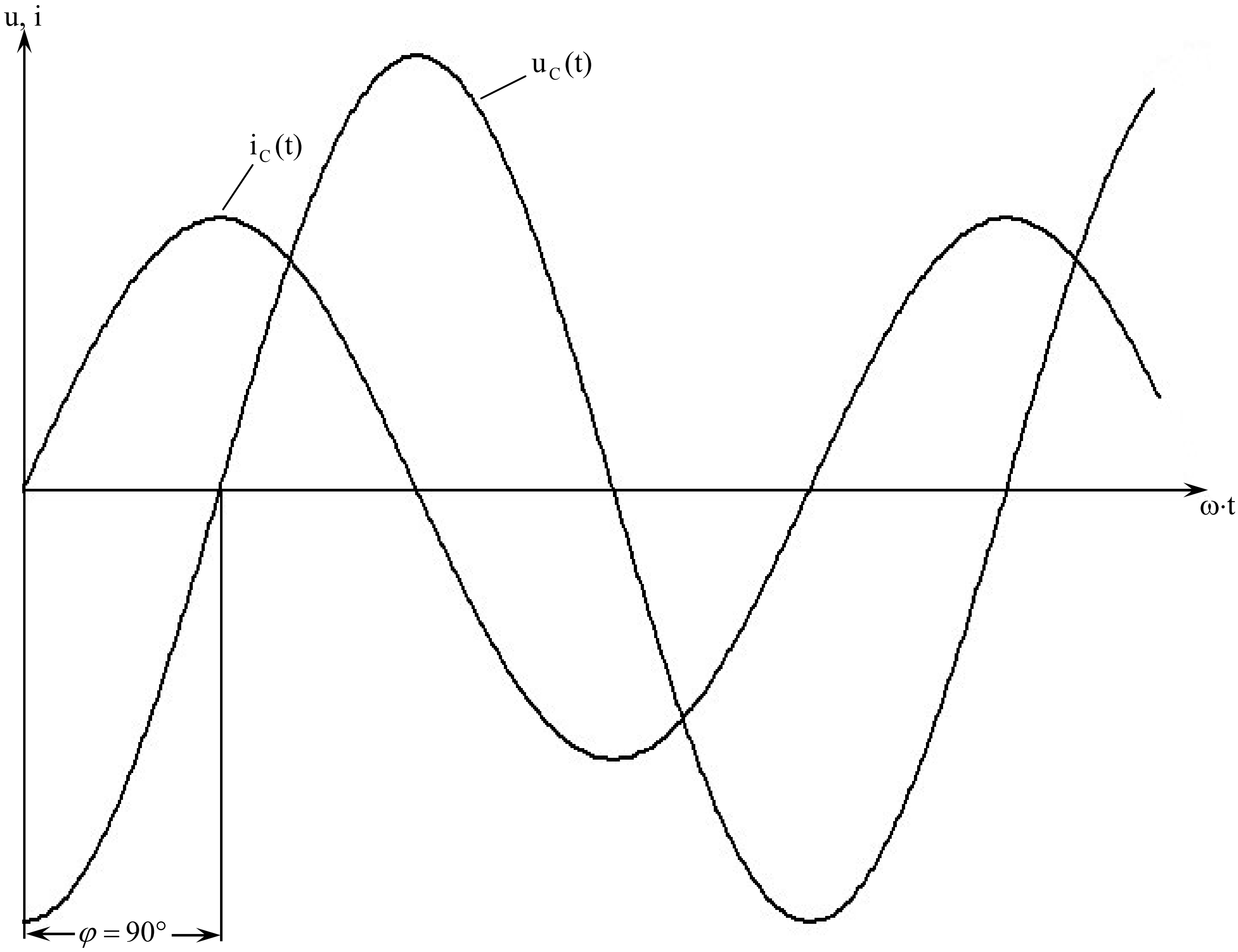


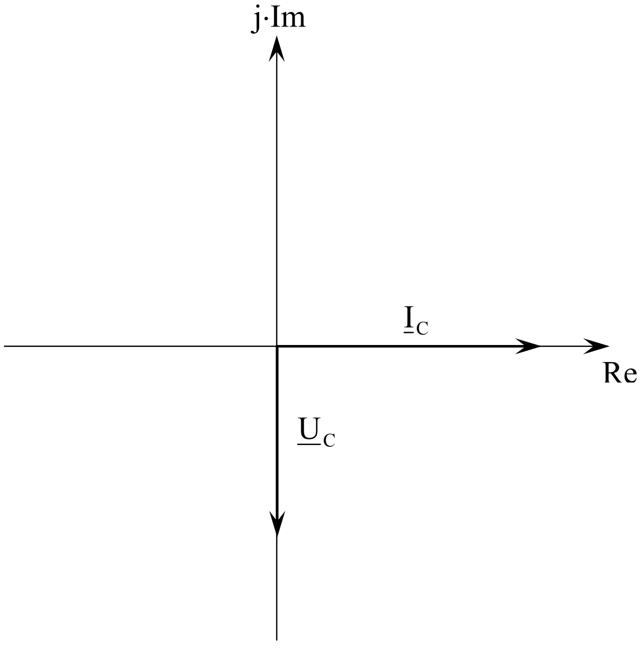
Die Ladung Q ist von der Zeit abhängig; sie ist die Fläche unter der Strom-Zeit Funktion.
Allgemein gilt $Q = \int i\,dt$. Eingesetzt in die obere Gleichung ergibt das: $C = \frac{1}{U} \cdot \int i\,dt$ bzw. $u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C\,dt$.
Setzt man in diese Gleichung wieder einen sinusförmigen Strom ein, so erhält man:

$$u_C = \frac{1}{C} \cdot \int i_C\,dt = \frac{1}{C} \cdot \int \left(\hat{i}_C \cdot \sin(\omega \cdot t)\right) dt = \frac{\hat{i}_C}{C} \cdot \int \sin(\omega \cdot t)\,dt = \frac{\hat{i}_C}{\omega \cdot C} \cdot \left(-\cos(\omega \cdot t)\right)$$

$$\Leftrightarrow u_C = \hat{u}_C \cdot \left(-\cos(\omega \cdot t)\right) = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t - 90°)$$

Es gilt also $i_C = \hat{i}_C \cdot \sin(\omega \cdot t)$ und $u_C = \hat{u}_C \cdot \sin(\omega \cdot t - 90°)$. Dies bedeutet, dass die Spannung u_C dem Strom i_C um 90° nacheilt.





Die Gleichung im Zeigerdiagramm für den Strom $\underline{I}_C$ lautet: $\underline{I}_C = \hat{i}_C \cdot e^{j\omega\cdot t}$, für die Spannung $\underline{U}_C$: $\underline{U}_C = \hat{u}_C \cdot e^{j(\omega\cdot t - 90°)}$. Im Zeigerdiagramm sieht man ganz deutlich, dass die Spannung dem Strom um 90° nacheilt.

$$\underline{U}_C = \frac{1}{C} \cdot \int \underline{I}_C \, dt = \frac{1}{C} \cdot \int \left(\hat{i}_C \cdot e^{j\omega\cdot t}\right) dt = \frac{\hat{i}_C}{C} \cdot \int e^{j\omega\cdot t} \, dt$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_C = \frac{\hat{i}_C}{j\omega\cdot C} \cdot e^{j\omega\cdot t} = \frac{\hat{i}_C}{\omega\cdot C} \cdot e^{j(\omega\cdot t - 90°)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_C = \hat{u}_C \cdot e^{j(\omega\cdot t - 90°)}$$

(Das $\frac{1}{j}$ $(= -j)$ bedeutet eine Phasenverschiebung um −90°: $-j = 1 \cdot e^{-j90°}$)

Auf den Beweis, dass der Strom – selbst bei einer beliebigen Phasenverschiebung φ_i – der Spannung um 90° voreilt, wird hier verzichtet (siehe Seite 04).

Der komplexe Scheinwiderstand berechnet sich aus der Gleichung $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$. Für die Kapazität ergibt sich:

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = \frac{\hat{u}_C \cdot e^{j(\omega \cdot t - 90°)}}{\hat{i}_C \cdot e^{j\omega \cdot t}} = \frac{\hat{i}_C \cdot e^{j\omega \cdot t} \cdot e^{-j90°}}{\omega \cdot C \cdot \hat{i}_C \cdot e^{j\omega \cdot t}} = \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot e^{-j90°} = \frac{1}{j\omega \cdot C} = j \cdot X_C,$$ also gilt für X_C:

$$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}.$$

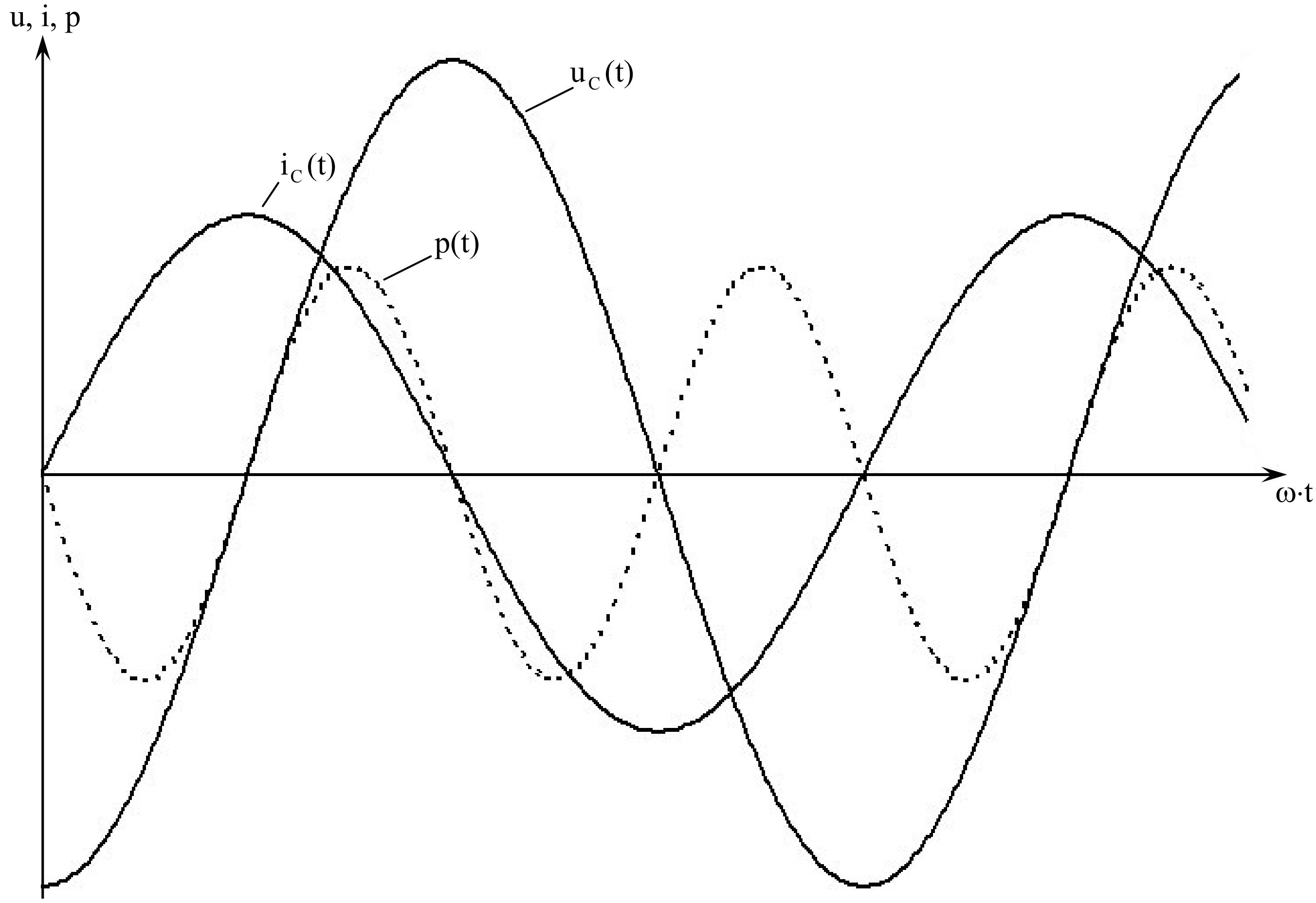
Bei einer Division von $\hat{u}_C$ durch $\hat{i}_C$ erhält man:

$$\frac{\hat{u}_C}{\hat{i}_C} = \frac{\hat{i}_C}{\omega \cdot C \cdot \hat{i}_C} = \frac{1}{\omega \cdot C} = -X_C$$

Weil ebenfalls gilt $\hat{u}_C = u_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}$ und $\hat{i}_C = i_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}$ kann man auch schreiben:

$$\frac{\hat{u}_C}{\hat{i}_C} = \frac{u_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}}{i_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{u_{C_{eff}}}{i_{C_{eff}}} = \frac{i_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}}{\omega \cdot C \cdot i_{C_{eff}} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\omega \cdot C} = -X_C$$

Bei den beiden Bauteilen Induktivität und Kapazität wird durch die Verschiebung zwischen Spannung und Strom um 90° die aufgenommene Energie nicht in Wärme umgesetzt, sondern wieder an das Netz zurückgegeben (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.3.2. Induktiver Verbraucher, Skript 1998).
Leistung ist allgemein das Produkt von Spannung und Strom, hier beispielhaft an der Kapazität im Zeitdiagramm dargestellt:



Durch die Phasenverschiebung existieren Flächenanteile im negativen Bereich. Deshalb ist der lineare Mittelwert der Momentanleistung Null, d. h. es gibt keine Wirkleistung. Die Amplitude der Momentanleistung bezeichnet man mit Blindleistung. Blindleistung pendelt zwischen der Quelle und dem Verbraucher hin und her. Sie dient zum Auf- und Abbau der elektrischen bzw. magnetischen Felder. Sie bewirkt keinen Verbrauch, wird also normalerweise auch nicht bezahlt (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.3.2. Induktiver Verbraucher, Skript 1998).

Allgemein gilt für das Berechnen der Blindleistung Q:

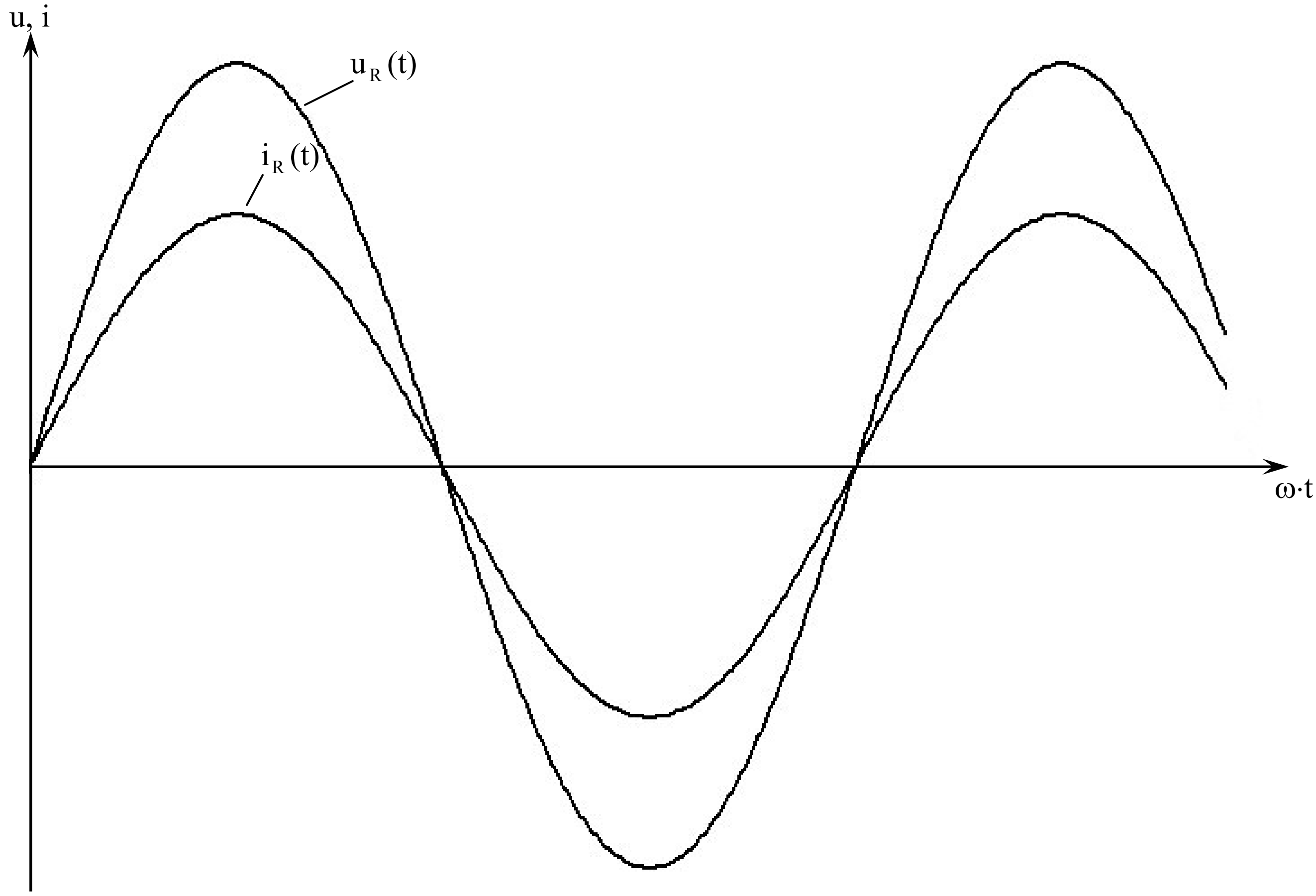
$$Q_C = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_C \cdot \hat{i}_C = u_{C_{eff}} \cdot i_{C_{eff}} = \frac{{u_{C_{eff}}}^2}{\frac{1}{\omega \cdot C}} \left(= \frac{{u_{C_{eff}}}^2}{-X_C} \right) = {i_{C_{eff}}}^2 \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \left(= {i_{C_{eff}}}^2 \cdot (-X_C) \right) \text{ bzw.}$$

$$Q_L = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_L \cdot \hat{i}_L = u_{L_{eff}} \cdot i_{L_{eff}} = \frac{{u_{L_{eff}}}^2}{\omega \cdot L} \left(= \frac{{u_{L_{eff}}}^2}{X_L} \right) = {i_{L_{eff}}}^2 \cdot \omega \cdot L \left(= {i_{L_{eff}}}^2 \cdot X_L \right)$$

Nach dem ohmschen Gesetz gilt $U = I \cdot R$, bzw. $\underline{U} = \underline{I} \cdot \underline{Z}$. Bei einem ohmschen Widerstand ist $\underline{Z} = R$. Setzt man einen sinusförmigen Strom ein, so erhält man:

$$u_R = i_R \cdot R = \hat{i}_R \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot R = \hat{i}_R \cdot R \cdot \sin(\omega \cdot t)$$
$$\Leftrightarrow u_R = \hat{u}_R \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Es existiert also keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom.



Aus diesem Grund gibt es keine negativen Flächen bei der Berechnung der Leistung P. Sie wird berechnet aus:

$$P = \frac{1}{2} \cdot \hat{u}_R \cdot \hat{i}_R = u_{R_{eff}} \cdot i_{R_{eff}} = \frac{{u_{R_{eff}}}^2}{R} = {i_{R_{eff}}}^2 \cdot R$$

P ist eine Wirkleistung die vollständig im Widerstand in Wärme umgesetzt wird. Der Verlauf von P ist immer positiv, d. h. der Energiefluss erfolgt immer von der Quelle zum Verbraucher, wo die Umwandlung der Energie in Wärme abläuft (Vorlesung Prof. Gerdes, Kap. 4.3.1. Ohmscher Verbraucher, Skript 1998).