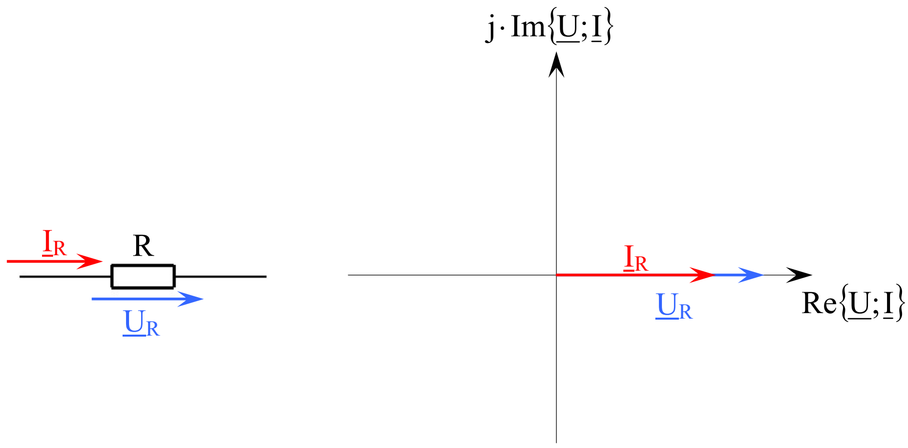
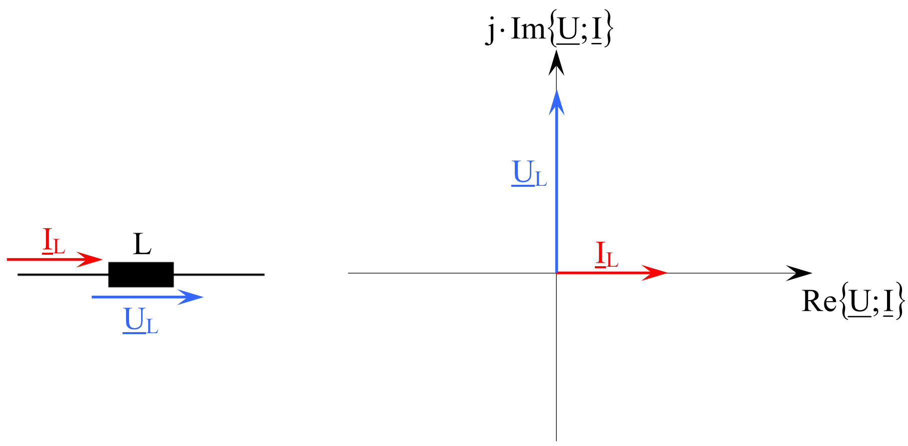
University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Wechselspannung Zeigerdiagramme	Tutorium ZD-01 Stand: 19.03.2006; R0

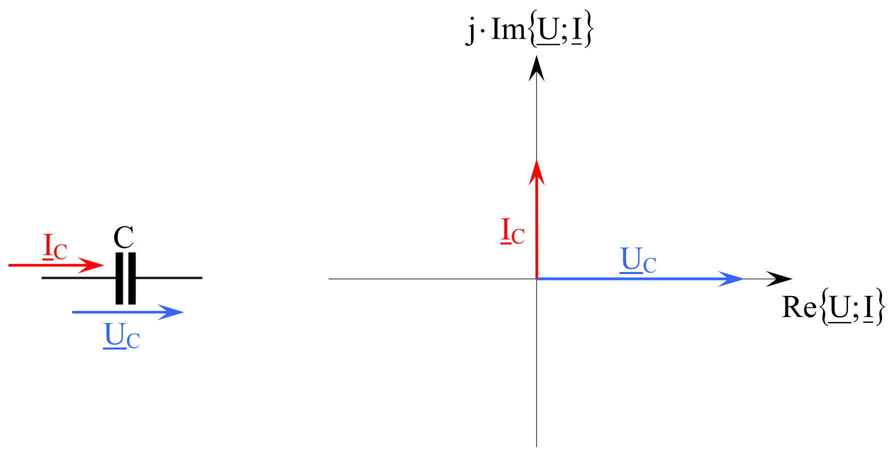
Wie bereits im Kapitel „Wechselspannung an R, L, C“ beschrieben, ist die Darstellung von Wechselgrößen in reellen Organigrammen ein umständliches Verfahren. Aufgrund dessen greift man in der Elektrotechnik auf das einfachere Darstellen von symbolischen Zeigern zurück.
Hier noch einmal eine kurze Wiederholung der drei Bauelemente und ihre Eigenschaften:



Beim Widerstand sind Strom und Spannung in Phase



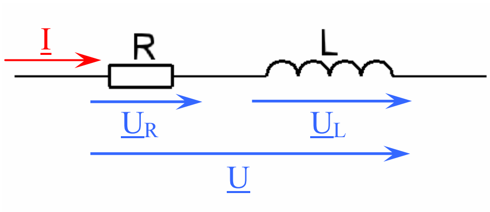
Bei der Induktivität eilt die Spannung dem Strom um 90° vor



Bei der Kapazität eilt der Strom der Spannung um 90° vor

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Wechselspannung Zeigerdiagramme	Tutorium ZD-02 Stand: 19.03.2006; R0

Bei einer RL-Reihenschaltung werden Widerstand und Induktivität vom gleichen Strom $\underline{I}$ durchflossen. Weil der Strom nicht explizit vorgegeben wurde, ist die Festlegung von Betrag und Phase willkürlich. Aus zeichentechnischen Gründen wird hier das andere DIN-Symbol für die Induktivität verwendet.



Es gilt: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{Z}_R = \underline{I} \cdot R$ und

$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot \underline{Z}_L = \underline{I} \cdot j \cdot X_L$

Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ergibt sich aus der **geometrischen** Addition der Einzelspannungen (2. Kirchhoffscher Satz):

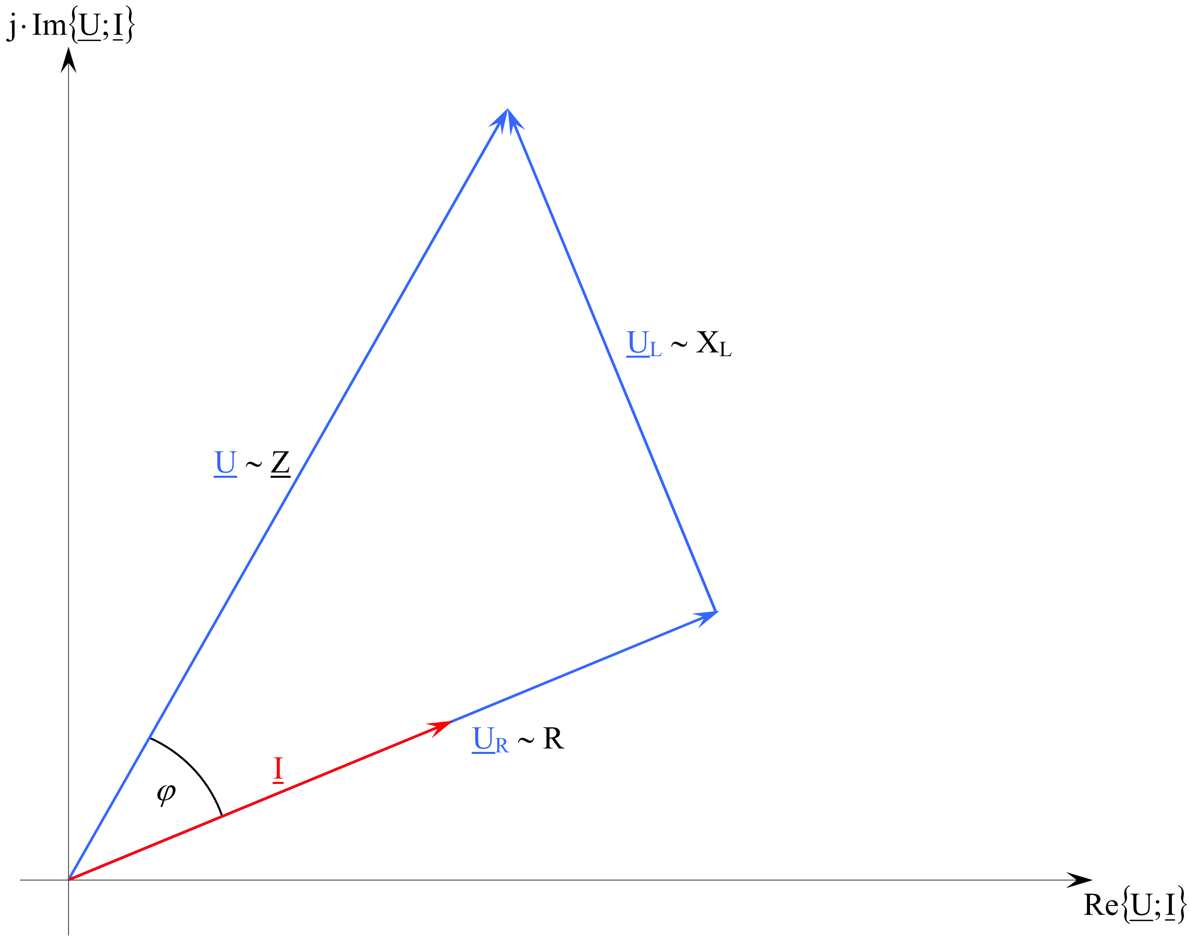
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot X_L = \underline{I} \cdot (R + j \cdot X_L) = \underline{I} \cdot \underline{Z}\text{, also } \underline{Z} = R + j \cdot X_L$$

Die einzelnen Beträge, d. h. die Länge des jeweiligen Zeigers, für die Spannung am Widerstand bzw. an der Induktivität errechnet man wie folgt:

$$|\underline{U}_R| = |\underline{I} \cdot R| = |\underline{I}| \cdot R$$

$$|\underline{U}_L| = |\underline{I} \cdot j \cdot X_L| = |\underline{I}| \cdot |j \cdot X_L| = |\underline{I}| \cdot |X_L| \quad \left(\text{es gilt}: j \cdot X_L = X_L \cdot e^{j90°}\right)$$

Das dazugehörige Zeigerdiagramm sieht wie folgt aus:



In Wirklichkeit beginnen alle Spannungen und Ströme im Ursprung. Man verschiebt die Spannung $\underline{U}_L$ einfach ans Ende von $\underline{U}_R$ damit sie **geometrisch** addiert werden kann. Im Schaltbild sieht man es am deutlichsten: Die Spannung $\underline{U}_L$ beginnt dort, wo die Spannung $\underline{U}_R$ aufhört.
Deutlich ist ebenfalls zu erkennen, dass die Gesamtspannung $\underline{U}$ die **geometrische** Addition aus $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_L$ ist. Um den Betrag der Gesamtspannung zu berechnen, quadriert man die einzelnen Beträge der Einzelspannungen, summiert diese und radiziert das Ergebnis (Satz des Pythagoras). Die Gleichung sieht wie folgt aus:

$$|\underline{U}| = \sqrt{|\underline{U}_R|^2 + |\underline{U}_L|^2}$$

Dafür müssen die einzelnen Beträge bekannt sein. Der Größe von $|\underline{U}|$ kann auf eine andere Art berechnet werden: Man ersetzt einfach die einzelnen Beträge der Spannungen $\underline{U}_R$ sowie $\underline{U}_L$ und erhält – nach einigen Umformungen – das Ergebnis für $|\underline{U}|$ über das Produkt von Strom $\underline{I}$ und Impedanz $\underline{Z}$.

$$|\underline{U}| = \sqrt{|\underline{U}_R|^2 + |\underline{U}_L|^2} = \sqrt{|\underline{I}\cdot R|^2 + |\underline{I}\cdot j\cdot X_L|^2} = \sqrt{|\underline{I}|^2\cdot\left(|R|^2 + |j\cdot X_L|^2\right)} = |\underline{I}|\cdot\underbrace{\sqrt{R^2 + X_L^2}}_{|\underline{Z}|} = |\underline{I}|\cdot|\underline{Z}|$$

Der Phasenwinkel φ kann mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen ermittelt werden. Er gibt die Phasendifferenz zwischen Strom $\underline{I}$ und Gesamtspannung $\underline{U}$ an.

$$\sin(\varphi) = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}|} \qquad \cos(\varphi) = \frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|} \qquad \tan(\varphi) = \frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}_R|}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{|\underline{U}_L|}{|\underline{U}_R|}\right)$$

Weil die Spannungen proportional zur Impedanz sind gilt auch dementsprechend:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|X_L|}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{R}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{|X_L|}{R}\right)$$

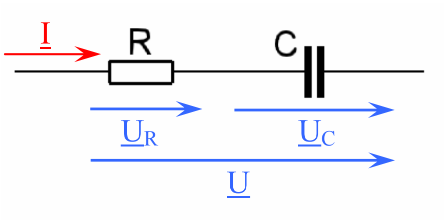
Im Kapitel „Wechselspannung an R, L, C“ wurde gezeigt, dass auch die Leistung proportional zur Impedanz ist. Daher auch:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Q_L}{S}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Q_L}{P}\right)$$

Allgemein gilt für die Leistung:

$$\underline{S} = P + j\cdot Q \quad \text{bzw.} \quad |\underline{S}| = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{1}{2}\cdot\hat{u}\cdot\hat{i} = u_{eff}\cdot i_{eff}$$

Bei einer RC-Reihenschaltung werden Widerstand und Kapazität ebenfalls vom gleichen Strom $\underline{I}$ durchflossen. Diesen wählt man wiederum als Bezugspunkt für das Erstellen des Zeigerbilds. Die Festlegung von Betrag und Phase erfolgt willkürlich.



Es gilt: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{Z}_R = \underline{I} \cdot R$ und
$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \underline{Z}_C = \underline{I} \cdot j \cdot X_C$

Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ergibt sich aus der **geometrischen** Addition der Einzelspannungen (2. Kirchhoffscher Satz):

$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underline{U}_C = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot X_C = \underline{I} \cdot (R + j \cdot X_C) = \underline{I} \cdot \underline{Z}, \text{ also } \underline{Z} = R + j \cdot X_C$$

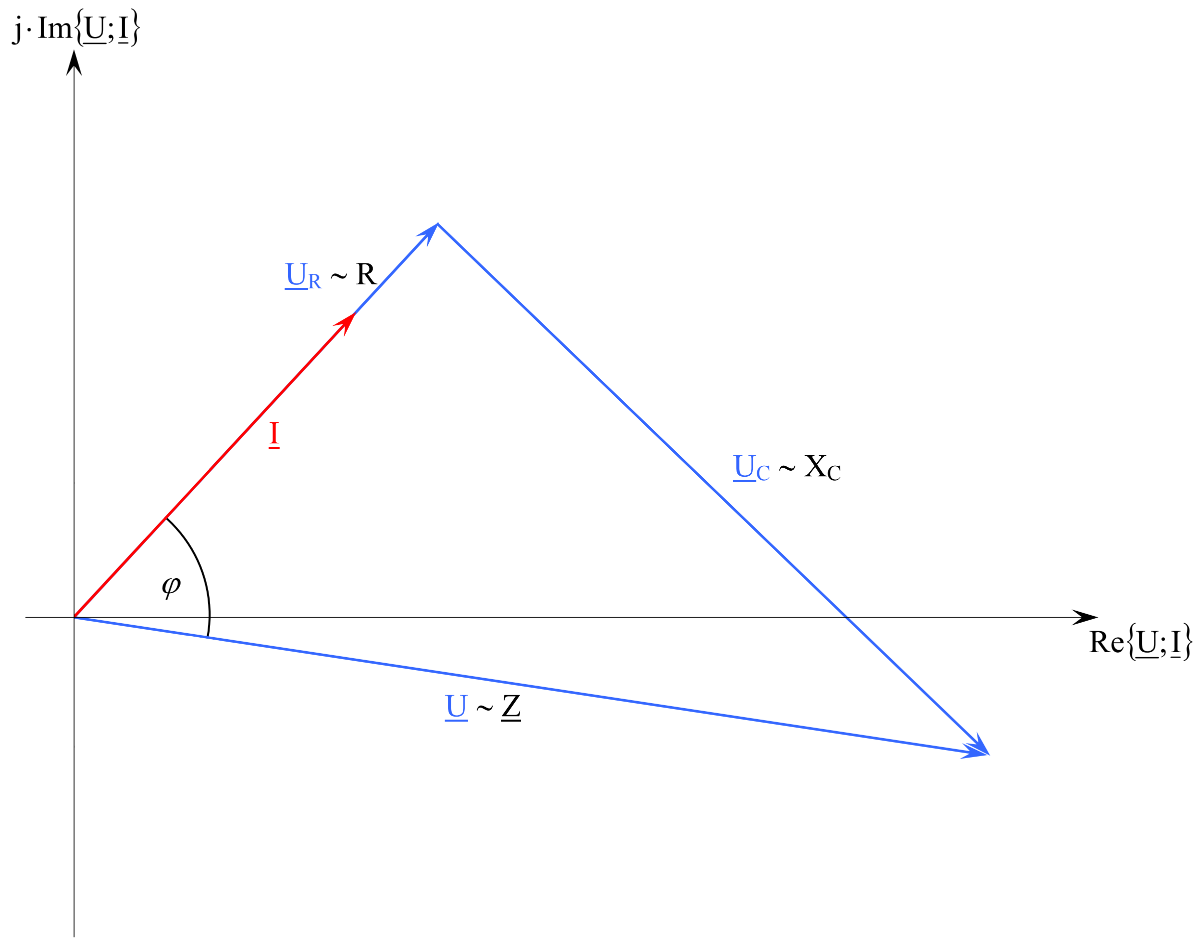
Hinweis: Bei einer Reihenschaltung werden die einzelnen Widerstände addiert. Durch den Phasenbezug von Strom und Spannung bei der Kapazität ergibt sich hier jedoch eine Subtraktion $\left(\frac{1}{j} = -j\right)$. Um daraus wieder eine Addition zu machen, muss der Blindwiderstand X_C negativ sein. Dann gilt:

$$\underline{Z} = R - j \cdot (-X_C) = R + j \cdot X_C$$

Die einzelnen Beträge, d. h. die Länge des jeweiligen Zeigers, für die Spannung am Widerstand bzw. an der Kapazität errechnet man wie folgt:

$$|\underline{U}_R| = |\underline{I} \cdot R| = |\underline{I}| \cdot R$$
$$|\underline{U}_C| = |\underline{I} \cdot j \cdot X_C| = |\underline{I}| \cdot |j \cdot X_C| = |\underline{I}| \cdot |X_C| \quad \left(\text{es gilt}: j \cdot X_C = X_C \cdot e^{j90°} = X_C \cdot e^{-j90°} \text{ [weil } X_C < 0]\right)$$

Das dazugehörige Zeigerdiagramm sieht wie folgt aus:



Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ist die **geometrische** Addition aus $\underline{U}_R$ und $\underline{U}_C$. Es gilt:

$$\left|\underline{U}\right| = \sqrt{\left|\underline{U}_R\right|^2 + \left|\underline{U}_C\right|^2}$$

$$\left|\underline{U}\right| = \sqrt{\left|\underline{U}_R\right|^2 + \left|\underline{U}_C\right|^2} = \sqrt{\left|\underline{I}\cdot R\right|^2 + \left|\underline{I}\cdot j\cdot X_C\right|^2} = \sqrt{\left|\underline{I}\right|^2 \cdot \left(\left|R\right|^2 + \left|j\cdot X_C\right|^2\right)} = \left|\underline{I}\right| \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 + {X_C}^2}}_{\left|\underline{Z}\right|} = \left|\underline{I}\right| \cdot \left|\underline{Z}\right|$$

Der Phasenwinkel φ wird wie gehabt berechnet:

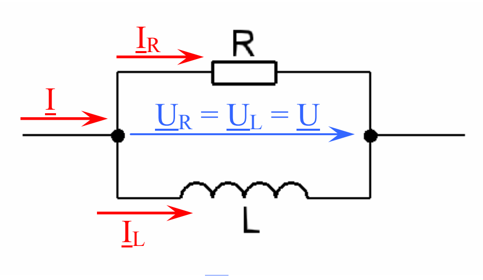
$$\sin(\varphi) = \frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}|} \qquad \cos(\varphi) = \frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|} \qquad \tan(\varphi) = \frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}_R|}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{|\underline{U}_C|}{|\underline{U}_R|}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|X_C|}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{R}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{|X_C|}{R}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Q_C}{S}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Q_C}{P}\right)$$

Bei einer RL-Parallelschaltung fällt am Widerstand und an der Induktivität die gleiche Spannung $\underline{U}$ ab. Diese wählt man daher als Bezug. Es ist aber auch möglich, dass Zeigerbild durch einen der beiden Ströme zu konstruieren. Die Zusammenhänge sind in allen Fällen gleich. Weil die Spannung nicht explizit vorgegeben wurde, ist die Festlegung von Betrag und Phase wiederum willkürlich.



Es gilt: $\underline{I}_R = \underline{U} \cdot \underline{Y}_R = \underline{U} \cdot G = \underline{U} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\underline{U}}{R}$ und

$$\underline{I}_L = \underline{U} \cdot \underline{Y}_L = \underline{U} \cdot B_L = \underline{U} \cdot \frac{1}{j \cdot X_L} = \frac{\underline{U}}{j \cdot X_L}$$

Der Gesamtstrom $\underline{I}$ ergibt sich aus der **geometrischen** Addition der Einzelströme (1. Kirchhoffscher Satz):

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_L = \frac{\underline{U}}{R} + \frac{\underline{U}}{j \cdot X_L} = \underline{U} \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X_L} \right) = \underline{U} \cdot \underline{Y}, \text{ also } \underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X_L}$$

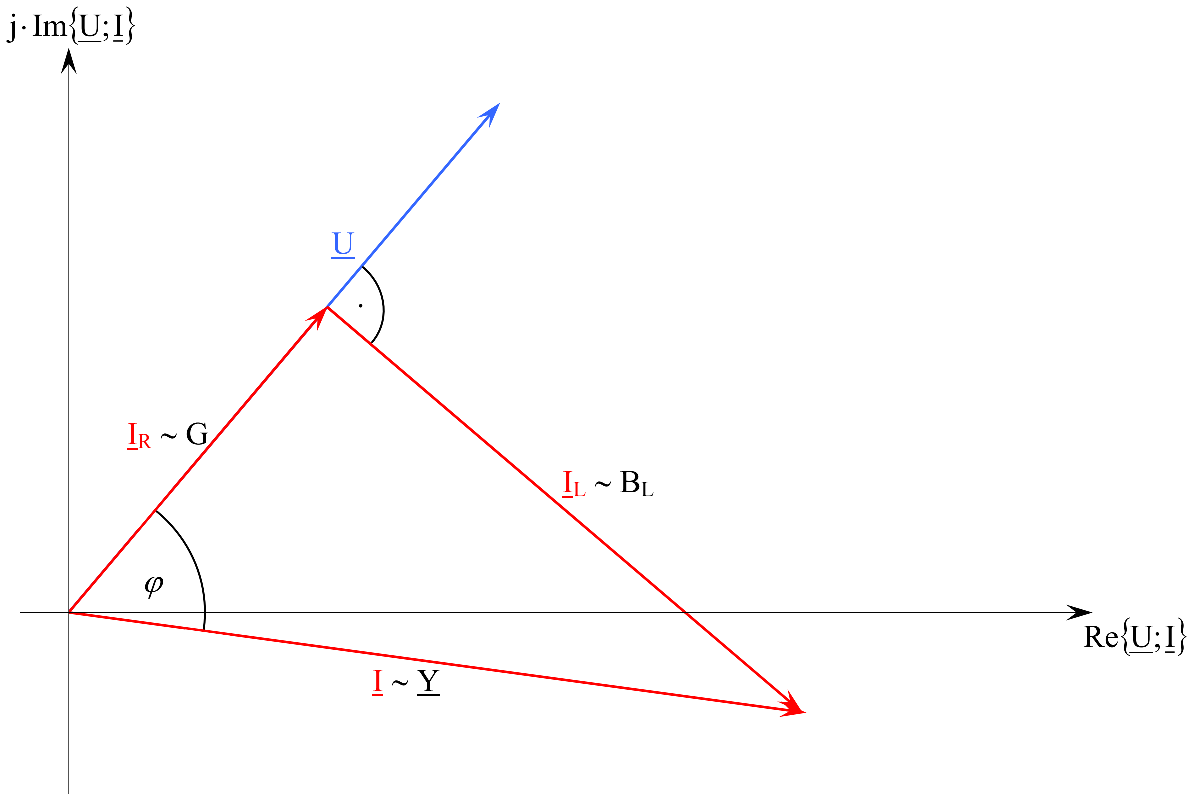
$$\text{bzw. } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{j \cdot X_L}} = \frac{R \cdot j \cdot X_L}{R + j \cdot X_L}$$

Die jeweiligen Beträge, d. h. die Länge des jeweiligen Zeigers, für den Strom durch Widerstand bzw. durch die Induktivität errechnet man wie folgt:

$$|\underline{I}_R| = \left| \frac{\underline{U}}{R} \right| = \frac{|\underline{U}|}{R}$$

$$|\underline{I}_L| = \left| \frac{\underline{U}}{j \cdot X_L} \right| = \frac{|\underline{U}|}{|j \cdot X_L|} = \frac{|\underline{U}|}{|X_L|}$$

Das dazugehörige Zeigerdiagramm sieht wie folgt aus:



Dieses Zeigerbild ist eine Momentaufnahme; alle Spannungen und Ströme beginnen im Ursprung und werden nur zur **geometrischen** Addition auf ihren Wirkungslinien verschoben. Weil sich alle Zeiger mit der Geschwindigkeit $\omega \cdot t$ entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn drehen und der Strom $\underline{I}_L$ der Spannung $\underline{U}$ nacheilt, wird dieser „nach rechts“, bezogen auf $\underline{U}_L$, gezeichnet – exakt 90° nacheilend.
Der Betrag des Gesamtstroms wird wie folgt berechnet:

$$|\underline{I}| = \sqrt{|\underline{I}_R|^2 + |\underline{I}_L|^2}$$

Dafür müssen die einzelnen Beträge bekannt sein. Den Betrag von $\underline{I}$ kann man auch auf eine andere Art und Weise berechnen:

$$|\underline{I}| = \sqrt{|\underline{I}_R|^2 + |\underline{I}_L|^2} = \sqrt{\left|\frac{\underline{U}}{R}\right|^2 + \left|\frac{\underline{U}}{j \cdot X_L}\right|^2} = \sqrt{|\underline{U}|^2 \cdot \left(\left|\frac{1}{R}\right|^2 + \left|\frac{1}{j \cdot X_L}\right|^2\right)} = |\underline{U}| \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_L}\right)^2}}_{|\underline{Y}|} = |\underline{U}| \cdot |\underline{Y}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|}$$

Für den Phasenwinkel φ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}|} \qquad \cos(\varphi) = \frac{|\underline{I}_R|}{|\underline{I}|} \qquad \tan(\varphi) = \frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}_R|}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{|\underline{I}_R|}{|\underline{I}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{|\underline{I}_L|}{|\underline{I}_R|}\right)$$

Weil die Ströme proportional zur Admittanz sind gilt auch dementsprechend:

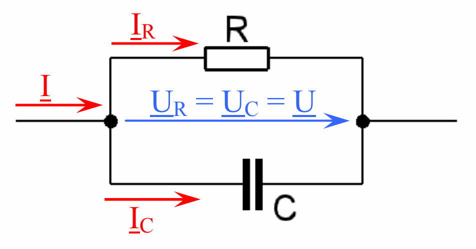
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|B_L|}{|\underline{Y}|}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{G}{|\underline{Y}|}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{|B_L|}{G}\right)$$

Für die Leistungen gilt:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Q_L}{S}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Q_L}{P}\right)$$

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	# Wechselspannung Zeigerdiagramme	Tutorium ZD-010 Stand: 19.03.2006; R0

Bei der RC-Reihenschaltung gelten ähnliche Regeln wie bei der RL-Reihenschaltung, jedoch eilt der Strom durch die Kapazität der daran abfallenden Spannung $\underline{U}$ um 90° vor.



Es gilt: $\underline{I}_R = \underline{U} \cdot \underline{Y}_R = \underline{U} \cdot G = \underline{U} \cdot \frac{1}{R} = \frac{\underline{U}}{R}$ und

$$\underline{I}_C = \underline{U} \cdot \underline{Y}_C = \underline{U} \cdot B_C = \underline{U} \cdot \frac{1}{\frac{X_C}{j}} = \underline{U} \cdot j \cdot \frac{1}{X_C}$$

Der Gesamtstrom $\underline{I}$ ergibt sich aus der **geometrischen** Addition der Einzelströme (1. Kirchhoffscher Satz):

$$\underline{I} = \underline{I}_R + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} + \underline{U} \cdot j \cdot \frac{1}{X_C} = \underline{U} \cdot \left(\frac{1}{R} + j \cdot \frac{1}{X_C} \right) = \underline{U} \cdot \underline{Y}, \text{ also } \underline{Y} = \frac{1}{R} + j \cdot \frac{1}{X_C}$$

$$\text{bzw. } \underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j \cdot \frac{1}{X_C}} = \frac{R \cdot j \cdot X_C}{R + j \cdot X_C}$$

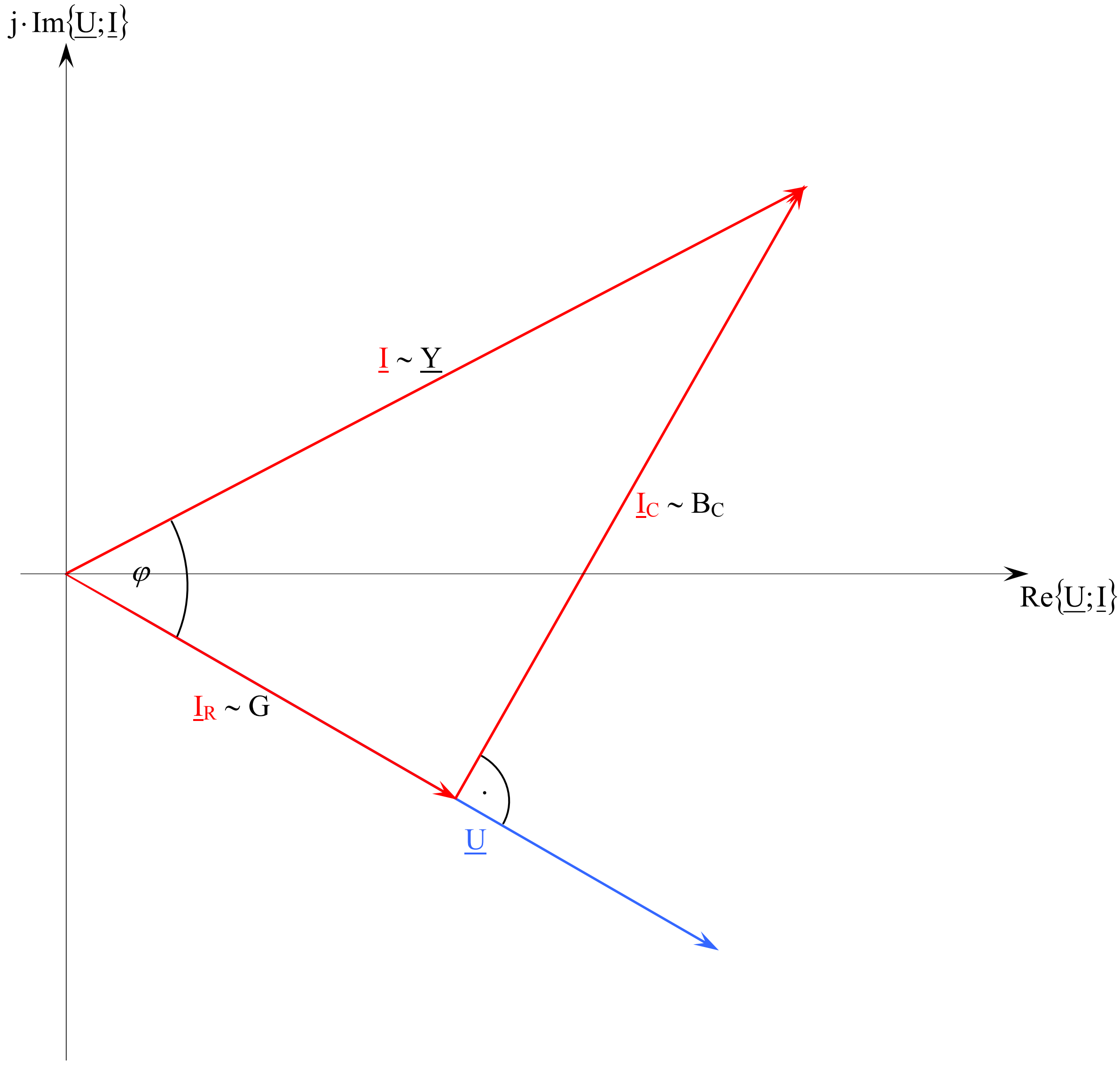
Die einzelnen Beträge, d. h. die Länge des jeweiligen Zeigers, für den Strom durch Widerstand bzw. durch die Kapazität errechnet man wie folgt:

$$\left|\underline{I}_R\right| = \left|\frac{\underline{U}}{R}\right| = \frac{\left|\underline{U}\right|}{R}$$

$$\left|\underline{I}_C\right| = \left|\underline{U} \cdot j \cdot \frac{1}{X_C}\right| = \left|\underline{U}\right| \cdot \left|j \cdot \frac{1}{X_C}\right| = \left|\underline{U}\right| \cdot \left|\frac{1}{X_C}\right|$$

HINWEIS: Der Blindwiderstand für die Kapazität wird negativ angegeben wird (z. B. $X_C = -20\Omega$). Für die Berechnung des Stroms durch die Kapazität wird – wie in der Formel für $\left|\underline{I}_C\right|$ dargestellt – der Betrag verwendet. Weil dies der positive Zahlenwert für X_C ist (also 20Ω), wird auch das Ergebnis für $\left|\underline{I}_C\right|$ in **jedem** Falle positiv.

Das dazugehörige Zeigerbild sieht wie folgt aus:



Die Berechnung für $|\underline{I}|$ erfolgt nach dem Satz des Pythagoras:

$$|\underline{I}| = \sqrt{|\underline{I}_R|^2 + |\underline{I}_C|^2}$$

Eine andere Möglichkeit $|\underline{I}|$ zu berechnen ist die Division von $|\underline{U}|$ durch $|\underline{Z}|$:

$$|\underline{I}| = \sqrt{|\underline{I}_R|^2 + |\underline{I}_C|^2} = \sqrt{\left|\frac{\underline{U}}{R}\right|^2 + \left|\underline{U} \cdot j \cdot \frac{1}{X_C}\right|^2} = \sqrt{|\underline{U}|^2 \cdot \left(\left|\frac{1}{R}\right|^2 + \left|j \cdot \frac{1}{X_C}\right|^2\right)} = |\underline{U}| \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X_C}\right)^2}}_{|\underline{Y}|} = |\underline{U}| \cdot |\underline{Y}| = \frac{|\underline{U}|}{|\underline{Z}|}$$

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Wechselspannung Zeigerdiagramme	Tutorium ZD-012 Stand: 19.03.2006; R0

Für den Phasenwinkel φ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}|} \qquad \cos(\varphi) = \frac{|\underline{I}_R|}{|\underline{I}|} \qquad \tan(\varphi) = \frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}_R|}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{|\underline{I}_R|}{|\underline{I}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{|\underline{I}_C|}{|\underline{I}_R|}\right)$$

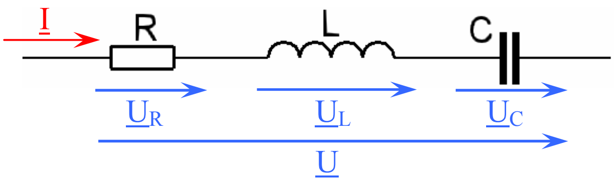
Weil die Ströme proportional zur Admittanz sind gilt auch dementsprechend:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|B_C|}{|\underline{Y}|}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{G}{|\underline{Y}|}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{|B_C|}{G}\right)$$

Für die Leistungen gilt:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Q_C}{S}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Q_C}{P}\right)$$

RLC-Reihenschaltungen, besser bekannt als Reihenschwingkreis, bestehen lediglich aus einer Induktivität und einer Kapazität. Der Widerstand, der zu den beiden Bauelementen in Reihe liegt, resultiert einerseits aus dem Wickelwiderstand der Induktivität, sowie dem Widerstand der inneren Zuleitungen und Kontaktwiderständen zwischen Elektroden und Anschlussdrähten bei der Kapazität. Aus diesem Grund ist der Wirkwiderstand bei einem Reihenschwingkreis sehr klein gegenüber den Blindwiderständen der Induktivität bzw. Kapazität.
Reihenschwingkreise sind Sonderfälle in der Elektrotechnik. Das liegt daran, dass die Spannung an dem jeweiligen Bauelement – betragsmäßig – um einiges größer sein kann als die angelegte Quellenspannung. Der Grund hierfür ist die Phasenlage der einzelnen Spannungen zum Strom, der bei allen Bauteilen gleich ist und deshalb als Bezugsgröße definiert wird.



Es gilt: $\underline{U}_R = \underline{I} \cdot \underline{Z}_R = \underline{I} \cdot R$,
$\underline{U}_L = \underline{I} \cdot \underline{Z}_L = \underline{I} \cdot j \cdot X_L$ und
$\underline{U}_C = \underline{I} \cdot \underline{Z}_C = \underline{I} \cdot j \cdot X_C$

Die Gesamtspannung $\underline{U}$ ergibt sich aus der **geometrischen** Addition der drei Einzelspannungen (2. Kirchhoffscher Satz):

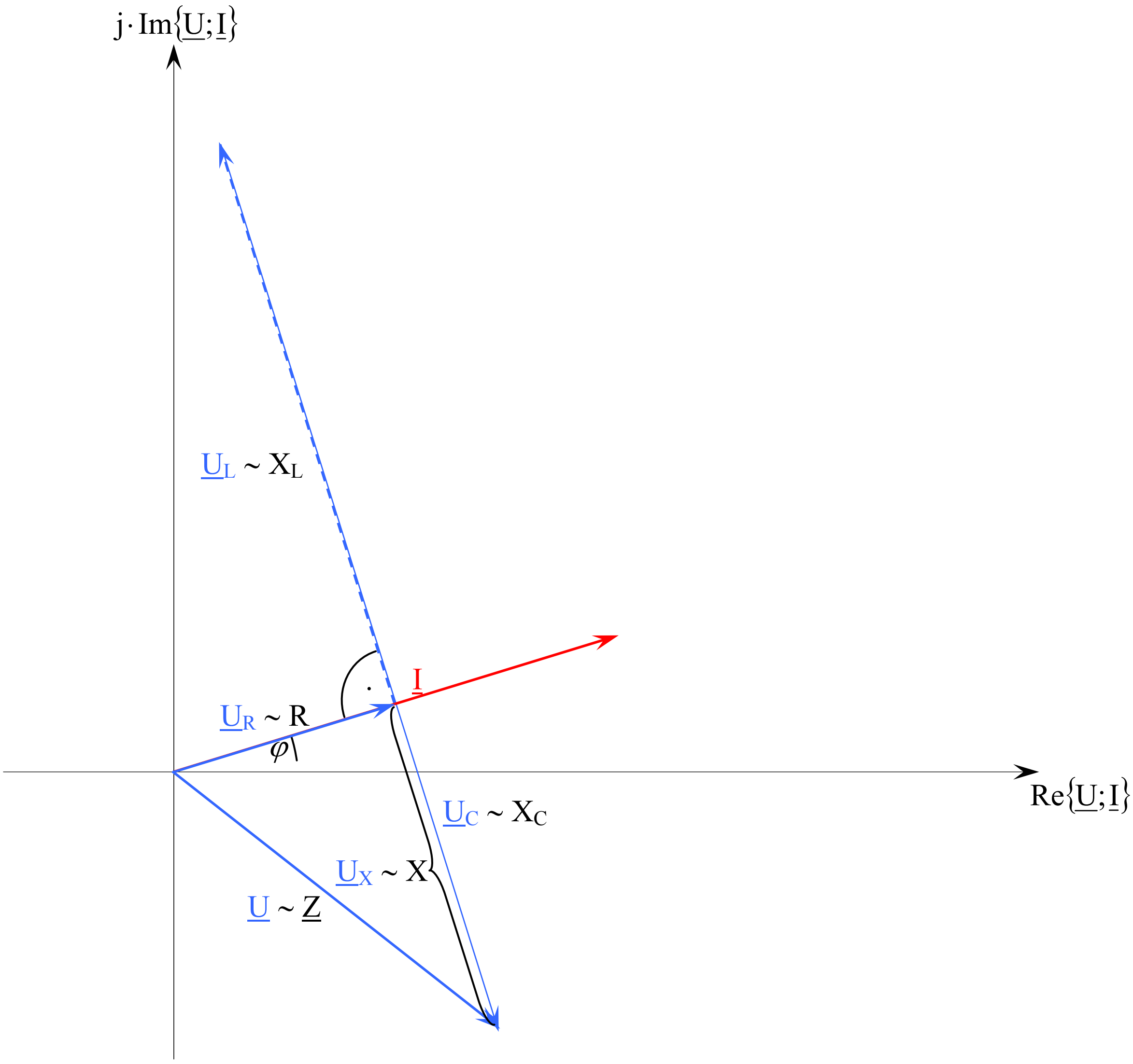
$$\underline{U} = \underline{U}_R + \underbrace{\underline{U}_L + \underline{U}_C}_{\underline{U}_X} = \underline{I} \cdot R + \underline{I} \cdot j \cdot X_L + \underline{I} \cdot j \cdot X_C = \underline{I} \cdot \left(R + j \cdot X_L + j \cdot X_C\right) = \underline{I} \cdot \underline{Z},$$

also $\underline{Z} = R + j \cdot X_L + j \cdot X_C = R + j \cdot \underbrace{\left(X_L + X_C\right)}_{X}$

Die einzelnen Beträge, d. h. die Länge des jeweiligen Zeigers, für die Spannung am Widerstand, der Induktivität und der Kapazität errechnet man wie folgt:

$$\left|\underline{U}_R\right| = \left|\underline{I} \cdot R\right| = \left|\underline{I}\right| \cdot R$$
$$\left|\underline{U}_L\right| = \left|\underline{I} \cdot j \cdot X_L\right| = \left|\underline{I}\right| \cdot \left|j \cdot X_L\right| = \left|\underline{I}\right| \cdot \left|X_L\right|$$
$$\left|\underline{U}_C\right| = \left|\underline{I} \cdot j \cdot X_C\right| = \left|\underline{I}\right| \cdot \left|j \cdot X_C\right| = \left|\underline{I}\right| \cdot \left|X_C\right|$$

Daraus resultiert folgendes Zeigerdiagramm:



Die Spannung $\underline{U}_L$ (hier gestrichelt dargestellt) eilt dem Strom $\underline{I}$, und damit auch der Spannung $\underline{U}_R$, um 90° vor. Die Spannung $\underline{U}_C$ eilt dem Strom um 90° nach. Dadurch ergibt sich eine Phasenverschiebung von $\underline{U}_L$ zu $\underline{U}_C$ um 180°. Dies bedeutet, dass sich beide Spannungen auf ein und derselben Wirkungslinie befinden und einfach voneinander subtrahiert werden können. Auf diese Art und Weise erhält man die Spannung $\underline{U}_X$. Geometrisch betrachtet wird die Spannung $\underline{U}_X$ durch eine Addition berechnet, die in Wirklichkeit eine Subtraktion ist, weil beide Spannungen in die entgegen gesetzte Richtung zeigen. Ganz deutlich wird dies bei der Berechnung des Blindwiderstands X:

$$X = X_L + X_C = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_X = \underline{I} \cdot j \cdot (X_L + X_C) = \underline{I} \cdot j \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right)$$

Der Betrag der Gesamtspannung $\underline{U}$ kann wiederum mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet werden. Allerdings ergibt sich der Imaginärteil aus den beiden Spannungen $\underline{U}_L$ und $\underline{U}_C$:

$$|\underline{U}| = \sqrt{|\underline{U}_R|^2 + |\underline{U}_X|^2} = \sqrt{|\underline{U}_R|^2 + |(\underline{U}_L - \underline{U}_C)|^2}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{U}| = \sqrt{|\underline{I} \cdot R|^2 + |\underline{I} \cdot j \cdot (X_L + X_C)|^2} = \sqrt{|\underline{I}|^2 \cdot \left[R^2 + (X_L + X_C)^2\right]} = |\underline{I}| \cdot \underbrace{\sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}}_{|\underline{Z}|} = |\underline{I}| \cdot |\underline{Z}|$$

Des Weiteren können drei mögliche Fälle auftreten:

1. $X_L > X_C$: das bedeutet ein positives Vorzeichen für den Blindwiderstand X, die resultierende Spannung $\underline{U}_X$ eilt dem Strom 90° vor; induktives Verhalten.

2. $X_L < X_C$: das bedeutet ein negatives Vorzeichen für den Blindwiderstand X, die resultierende Spannung $\underline{U}_X$ eilt dem Strom 90° nach; kapazitives Verhalten (siehe Beispielschaltung).

3. $X_L = X_C$: in diesem Fall liegt Resonanz vor. Die beiden Spannungen an Induktivität und Kapazität sind gleich groß und heben sich auf. Sie können um ein vielfaches größer als die angelegte Quellenspannung sein, die komplett am Widerstand R abfällt.

Für die ersten beiden Fälle gelten folgende Gesetzmäßigkeiten:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}|} \qquad \cos(\varphi) = \frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|} \qquad \tan(\varphi) = \frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}_R|}$$

$$\Leftrightarrow \varphi = \arcsin\left(\frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arccos\left(\frac{|\underline{U}_R|}{|\underline{U}|}\right) \qquad \Leftrightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{|\underline{U}_X|}{|\underline{U}_R|}\right)$$

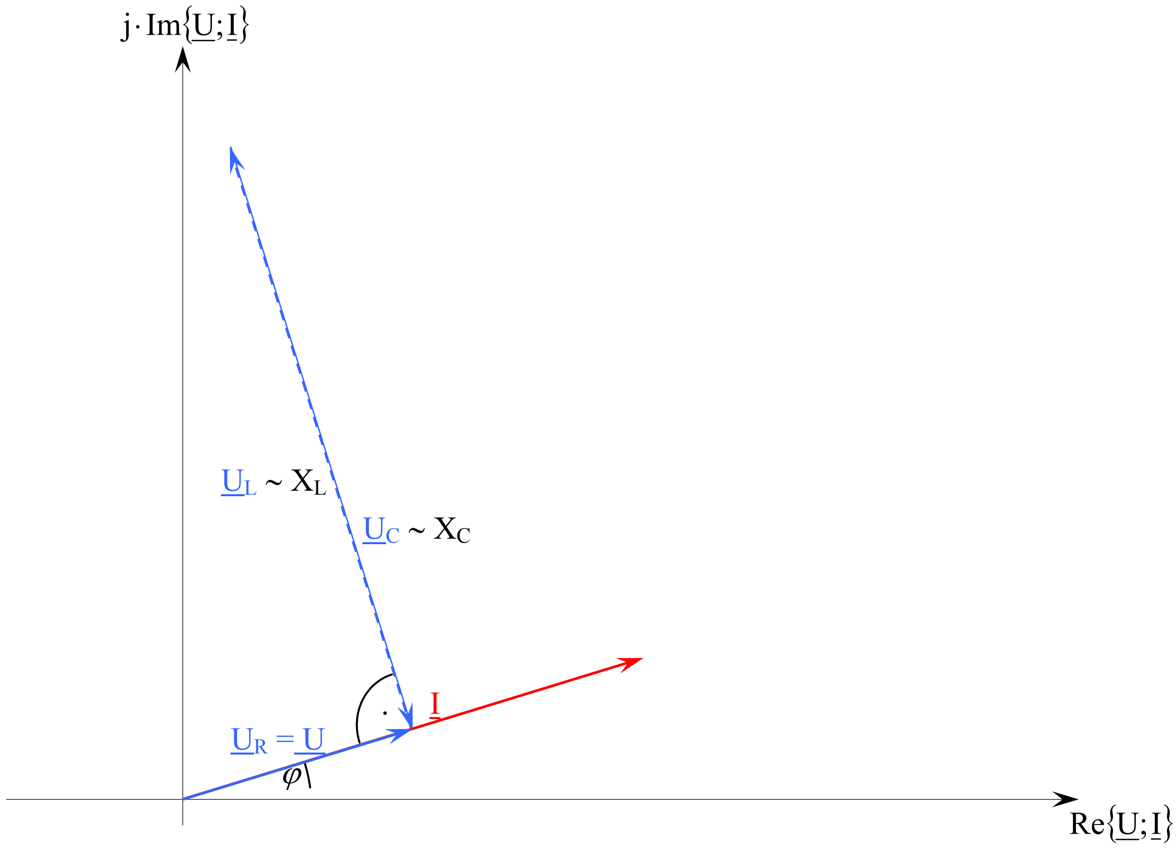
$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|X|}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{R}{|\underline{Z}|}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{|X|}{R}\right)$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{Q_X}{S}\right) \qquad \varphi = \arccos\left(\frac{P}{S}\right) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{Q_X}{P}\right)$$

Die gesamte Blindleistung Q_X berechnet sich aus folgender Formel:

$$Q_X = |Q_L - Q_C| = i_{eff}{}^2 \cdot \left|\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right| = i_{eff} \cdot \left|u_{L_{eff}} - u_{C_{eff}}\right|$$

Bei Resonanz (3. Fall) ergibt sich folgendes Zeigerdiagramm:



Für die Berechnung der Impedanz $\underline{Z}$ ergeben sich nun folgende Zusammenhänge:

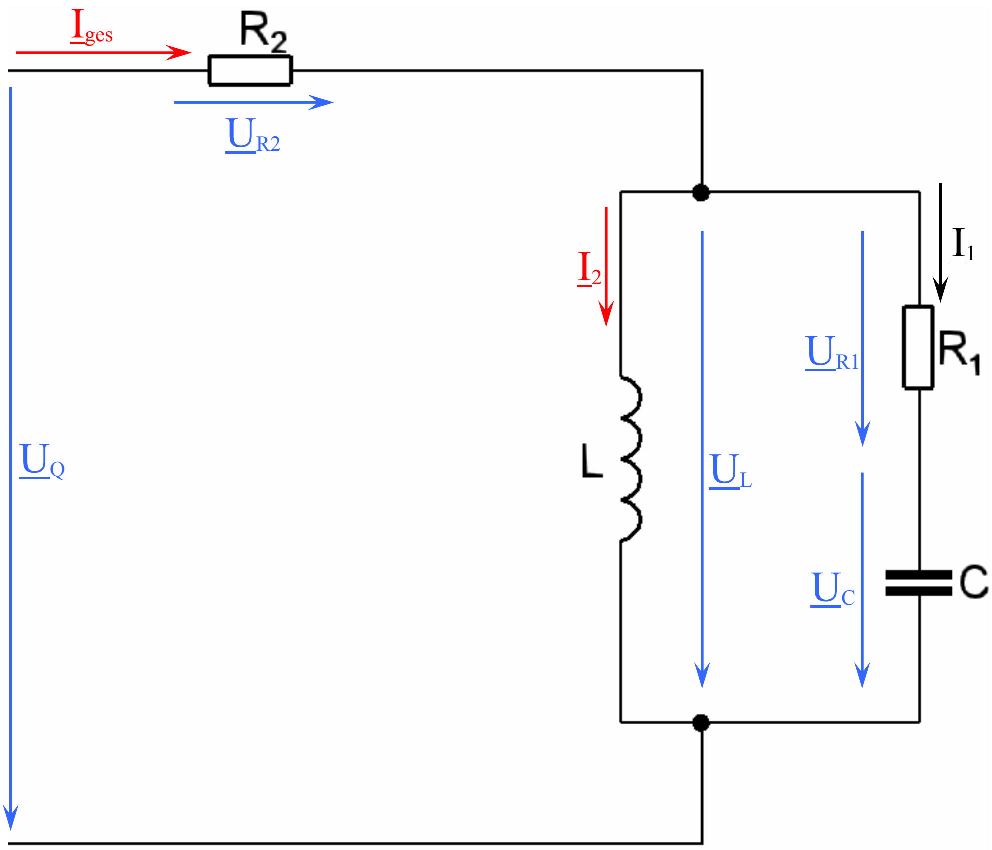
$$\underline{Z} = R + j \cdot X_L + j \cdot X_C = R + j \cdot \underbrace{\left(X_L + X_C\right)}_{=0} = R$$

Damit ist auch die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung gleich Null. Die Resonanzfrequenz wird aus der Gleichung für den Blindwiderstand X heraus berechnet:

$$\begin{aligned} & X = X_L + X_C = 0\big|_{X_L = -X_C} \\ \Leftrightarrow\ & X_L = -X_C \\ \Leftrightarrow\ & \omega \cdot L = \frac{1}{\omega \cdot C} \\ \Leftrightarrow\ & \omega^2 = \frac{1}{L \cdot C} \\ \Leftrightarrow\ & \omega = \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \\ \Leftrightarrow\ & f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \end{aligned}$$

University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Wechselspannung Zeigerdiagramme	Tutorium ZD-017 Stand: 19.03.2006; R0

Die Konstruktion eines Zeigerdiagramms soll beispielhaft für die unten abgebildete Schaltung einmal durchgeführt werden:



gegeben: $\underline{I}_1 = (1 + j \cdot 0{,}5)\mathrm{A}$

$R_1 = 10\Omega$

$R_2 = 5\Omega$

$X_L = 10\Omega$

$X_C = -8\Omega$

Maßstab: $1\mathrm{A} \mathrel{\hat{=}} 5\mathrm{cm}$

$2\mathrm{V} \mathrel{\hat{=}} 1\mathrm{cm}$

Gesucht ist eine zeichnerische Lösung für den Betrag der Quellenspannung U_Q sowie den Quellenstrom I_{ges}. Ferner soll gezeigt werden, ob diese Schaltung die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch belastet.

Lösung:

1. Vorgegeben ist nur der Strom $\underline{I}_1$ (schwarz gezeichnet). Das bedeutet, dass man **erst alle Spannungen und Ströme** in die Schaltung **einzeichnen** muss, damit eine saubere Zuordnung zu den berechneten Werten gewährleistet wird.

2. Die Phasenlage der einzelnen Spannungen und Ströme wird rechnerisch nicht benötigt. Sie ergibt sich aus dem Schaltbild und dem Zusammenhang zwischen Spannung und Strom an den drei passiven Bauelementen (siehe Seite 1).
   Berechnung aller möglichen Werte:

$$\left|\underline{I}_1\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\{\underline{I}_1\}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{I}_1\}^2} = \sqrt{(1\mathrm{A})^2 + (0{,}5\mathrm{A})^2} = \sqrt{1{,}25\mathrm{A}^2} \approx 1{,}12\mathrm{A}$$

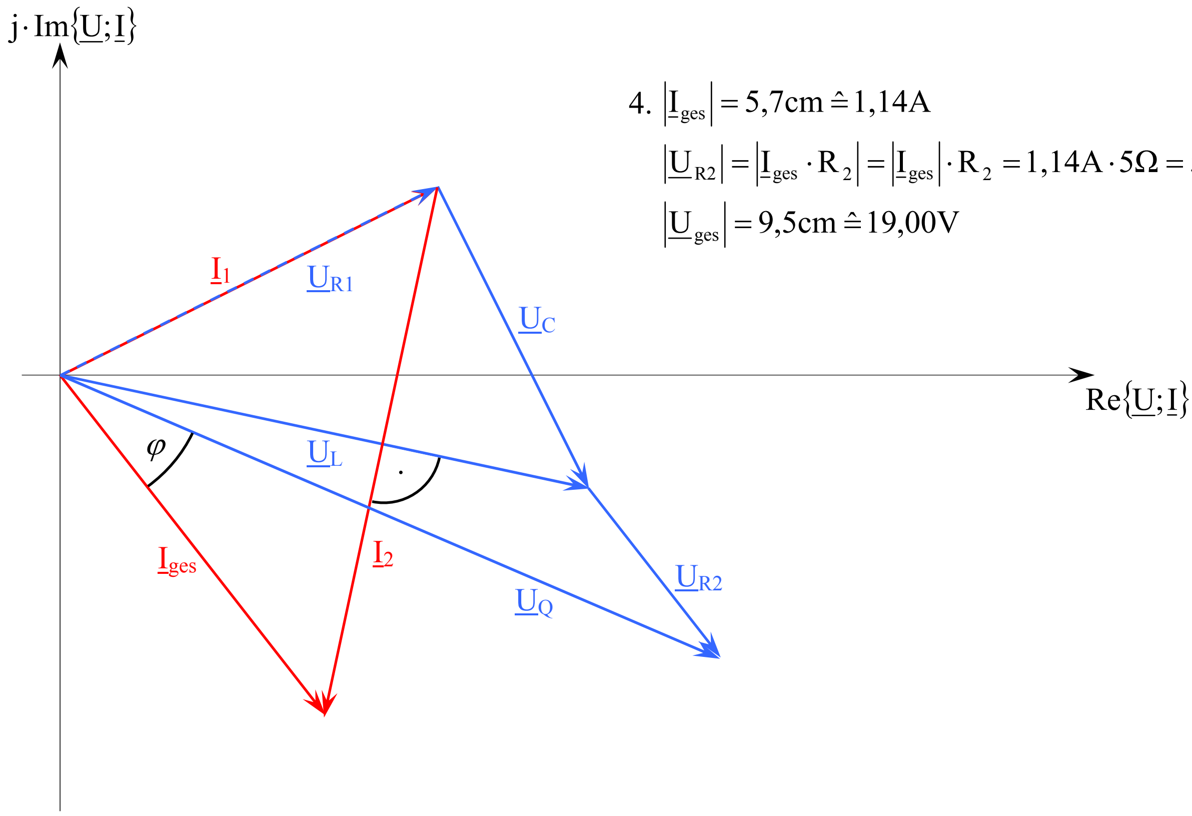
$$\left|\underline{U}_{R1}\right| = \left|\underline{I}_1 \cdot R_1\right| = \left|\underline{I}_1\right| \cdot R_1 = 1{,}12\mathrm{A} \cdot 10\Omega = 11{,}20\mathrm{V}$$

$$\left|\underline{U}_C\right| = \left|\underline{I}_1 \cdot j \cdot X_C\right| = \left|\underline{I}_1\right| \cdot \left|X_C\right| = 1{,}12\mathrm{A} \cdot 8\Omega = 8{,}96\mathrm{V}$$

$$\left|\underline{U}_L\right| = \sqrt{\left|\underline{U}_{R1}\right|^2 + \left|\underline{U}_C\right|^2} = \sqrt{(11{,}20\mathrm{V})^2 + (8{,}96\mathrm{V})^2} = \sqrt{205{,}72\mathrm{V}^2} \approx 14{,}34\mathrm{V}$$

$$\left|\underline{I}_2\right| = \left|\frac{\underline{U}_L}{X_L}\right| = \frac{\left|\underline{U}_L\right|}{\left|X_L\right|} = \frac{14{,}34\mathrm{V}}{10\Omega} = 1{,}43\mathrm{A}$$

3. Aus den bis jetzt berechneten Werten kann ein erstes Zeigerdiagramm erstellt werden (siehe Seite 19). Begonnen wird mit $\underline{I}_1$. Der Strom liegt 1A auf der reellen und 0,5A auf der imaginären Achse. Danach zeichnet man in Phase dazu $\underline{U}_R$. Die Spannung $\underline{U}_C$ liegt 90° nacheilend zum Strom $\underline{I}_1$ und wird deshalb „nach rechts“ – bezogen auf $\underline{I}_1$ – gezeichnet. Sie wird an das Ende von $\underline{U}_R$ verschoben, damit sie zu dieser Spannung **geometrisch** addiert werden kann. Das Ergebnis ist die Spannung $\underline{U}_L$ (2. Kirchhoffscher Satz: $\underline{U}_L - \underline{U}_{R1} - \underline{U}_C = 0 \Leftrightarrow \underline{U}_L = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C$).
   Der Strom $\underline{I}_2$ liegt zur Spannung $\underline{U}_L$ 90° nacheilend, wird daher um 90° „nach rechts“ – bezogen zu $\underline{U}_L$ – gezeichnet. Die **geometrische** Summe der beiden Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$ ergibt den Gesamtstrom $\underline{I}_{ges}$ (1. Kirchhoffscher Satz: $\underline{I}_{ges} - \underline{I}_1 - \underline{I}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{I}_{ges} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$).
   Es ist zwar möglich diesen Gesamtstrom zu berechnen, jedoch ist dieses Verfahren sehr umständlich. Daher wird der Betrag von $\underline{I}_{ges}$ – also die Länge des Zeigers – gemessen. Damit kann man die letzte Größe berechnen, in diesem Falle die Spannung an R_2. Sie liegt mit dem Gesamtstrom in Phase und wird an das Ende von $\underline{U}_L$ gezeichnet. Das ist deshalb möglich, weil der Widerstand R_2 mit der Parallelschaltung in der Reihenfolge vertauscht werden kann (Kommutativgesetz). An der Parallelschaltung fällt komplett die Spannung $\underline{U}_L$ ab. Für die Gesamtspannung ist es unwichtig, ob man sie aus der Gleichung $\underline{U}_Q = \underline{U}_{R2} + \underline{U}_L$, oder aus der Gleichung $\underline{U}_Q = \underline{U}_L + \underline{U}_{R2}$ berechnet. Die Spannung $\underline{U}_{R2}$ beginnt also dort, wo die Spannung der Parallelschaltung $\underline{U}_L$ aufhört. Das muss man auch im Zeigerdiagramm berücksichtigen.
   Die geometrische Summe aller Spannungen ergibt $\underline{U}_Q$; der Betrag wird, genau wie bei $\underline{I}_{ges}$, einfach gemessen.



4. $\left|\underline{I}_{ges}\right| = 5{,}7\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1{,}14\text{A}$

$\left|\underline{U}_{R2}\right| = \left|\underline{I}_{ges} \cdot R_2\right| = \left|\underline{I}_{ges}\right| \cdot R_2 = 1{,}14\text{A} \cdot 5\Omega = 5{,}70\text{V}$

$\left|\underline{U}_{ges}\right| = 9{,}5\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 19{,}00\text{V}$

Der Phasenwinkel φ gibt die Phasenlage von $\underline{I}_{ges}$ zu $\underline{U}_Q$ an. Eilt die Gesamtspannung dem Gesamtstrom vor, dann belastet die Schaltung die Quelle induktiv. Eilt die Gesamtspannung dem Gesamtstrom nach, so wird die Quelle kapazitiv belastet. In diesem Beispiel liegt induktive Last vor.

Zur Kontrolle sollen die Gesamtspannung $\underline{U}_Q$ und der Gesamtstrom $\underline{I}_{ges}$ einmal berechnet werden.
Eine Möglichkeit besteht darin, alle Spannungen und Ströme zu berechnen. Damit kann man $\underline{I}_{ges}$ nach der Formel $\underline{I}_{ges} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ und $\underline{U}_Q$ nach der Formel $\underline{U}_Q = \underline{U}_L + \underline{U}_{R2}$ ermitteln:

$$\underline{U}_L = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_C = \underline{I}_1 \cdot (R_1 - j \cdot X_C) = (1 + j \cdot 0{,}5)\text{A} \cdot (10 - j \cdot 8)\Omega = (14 - j \cdot 3)\text{V}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_L}{j \cdot X_L} = \frac{(14 - j \cdot 3)\text{V}}{j \cdot 10\Omega} = \frac{-j \cdot 3\text{V}}{j \cdot 10\Omega} + \frac{14\text{V}}{j \cdot 10\Omega} = (-0{,}3 - j \cdot 1{,}4)\text{A}$$

$$\text{Kontrolle: } \left|\underline{I}_2\right| = \sqrt{\text{Re}\{\underline{I}_2\}^2 + \text{Im}\{\underline{I}_2\}^2} = \sqrt{(-0{,}3\text{A})^2 + (-1{,}4\text{A})^2} = \sqrt{2{,}05\text{A}^2} \approx 1{,}43\text{A} \checkmark$$

$$\underline{I}_{ges} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (1 + j \cdot 0{,}5)\text{A} + (-0{,}3 - j \cdot 1{,}4)\text{A} = (0{,}7 - j \cdot 0{,}9)\text{A}$$

$$\text{Kontrolle: } \left|\underline{I}_{ges}\right| = \sqrt{\text{Re}\{\underline{I}_{ges}\}^2 + \text{Im}\{\underline{I}_{ges}\}^2} = \sqrt{(0{,}7\text{A})^2 + (-0{,}9\text{A})^2} = \sqrt{1{,}3\text{A}^2} \approx 1{,}14\text{A} \checkmark$$

$\underline{U}_{R2} = \underline{I}_{ges} \cdot R_2 = (0{,}7 - j \cdot 0{,}9)A \cdot 5\Omega = (3{,}5 - j \cdot 4{,}5)V$

$\underline{U}_Q = \underline{U}_L + \underline{U}_{R2} = (14 - j \cdot 3)V + (3{,}5 - j \cdot 4{,}5)V = (17{,}5 - j \cdot 7{,}5)V$

Kontrolle: $\left|\underline{U}_Q\right| = \sqrt{\mathrm{Re}\{\underline{U}_Q\}^2 + \mathrm{Im}\{\underline{U}_Q\}^2} = \sqrt{(17{,}5V)^2 + (-7{,}5V)^2} = \sqrt{362{,}5V^2} \approx 19{,}04V$ ✓

Andere Möglichkeiten, die Beträge von $\underline{U}_Q$ und $\underline{I}_{ges}$ zu berechnen, werden hier nicht herangezogen.