University of Applied Sciences Cologne Campus Gummersbach Dipl.-Ing. (FH) Dipl.-Wirt. Ing. (FH) G. Danielak	Mathematik Komplexe Zahlen	Tutorium KZ-01 Stand: 19.03.2006; R0

Gegeben ist die Gleichung $2x^2 + 2x = 12$. Löst man diese Gleichung nach x auf, so erhält man mit Hilfe der pq-Formel:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 6} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\ & x_1 = -3 \quad \vee \quad x_2 = 2
\end{aligned}
$$

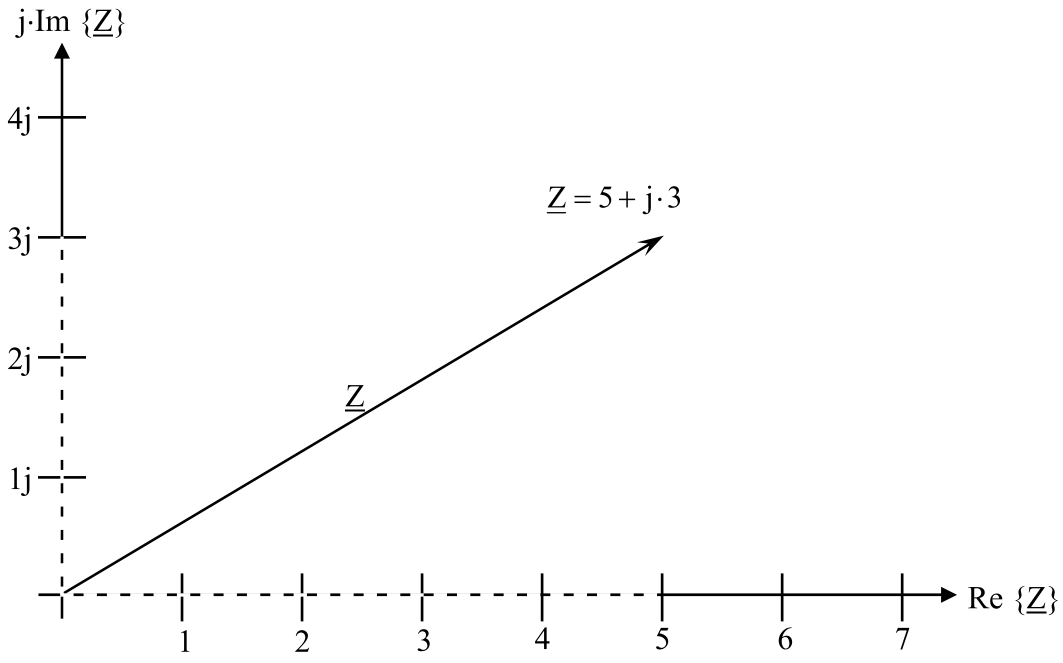
Wenn diese Gleichung jetzt $2x^2 + 2x = -12$ lautet, dann erhält man einen negativen Radikanden:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + x + 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{23}{4}} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \underbrace{\sqrt{-1}} \cdot \sqrt{\frac{23}{4}} \\
\Leftrightarrow\ & x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \quad j \quad \cdot \sqrt{\frac{23}{4}} \\
\Leftrightarrow\ & x_1 = -0{,}5 + j \cdot 2{,}398 \quad \vee \quad x_2 = -0{,}5 - j \cdot 2{,}398
\end{aligned}
$$

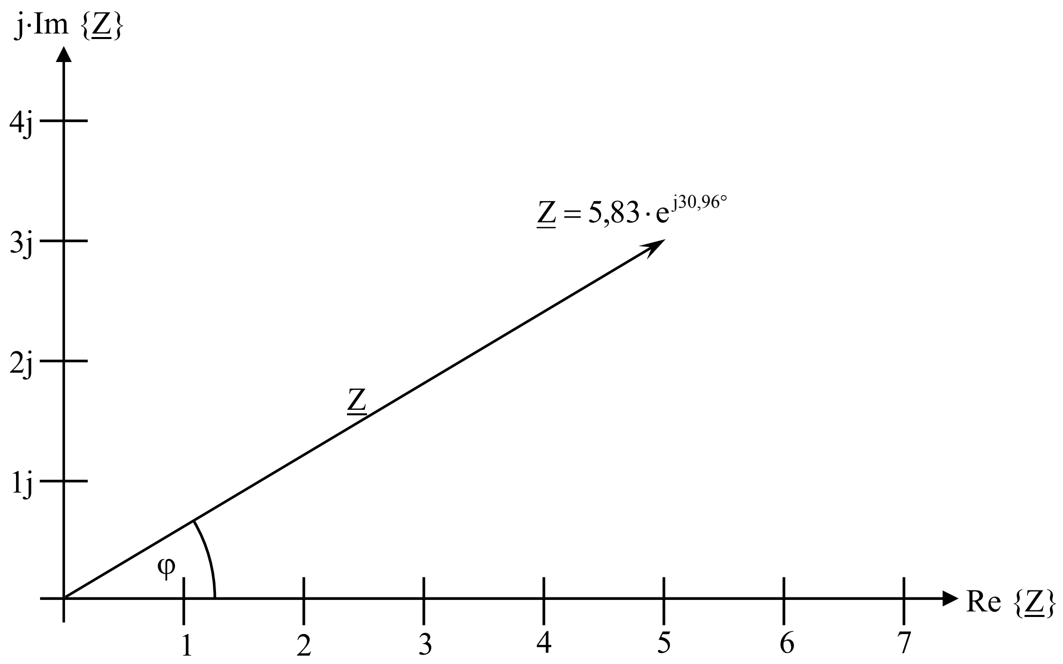
Da die Wurzelgleichung nur für positive x definiert ist, ersetzt man $\sqrt{-1}$ mit der imaginären Einheit „j“, d.h. $j = \sqrt{-1}$ (normalerweise ist die imaginäre Einheit „i“, jedoch ist „i“ in der Elektrotechnik bereits für den elektrischen Strom vergeben). Die reelle Achse (Zahlenstrahl) wird um die imaginäre Achse erweitert.

Beispiel: gegeben ist die komplexe Zahl $\underline{Z} = 5 + j \cdot 3$

Die Darstellung für $\underline{Z}$ liegt in Komponentenform vor. Die Komponenten sind der Realteil $\mathrm{Re}\{\underline{Z}\} = 5$ und der Imaginärteil $\mathrm{Im}\{\underline{Z}\} = 3$. Dabei ist zu beachten, dass der Imaginärteil nur 3 ist und nicht $j \cdot 3$! Das j ist nur ein Indikator für den Imaginärteil.



Eine andere Form der Darstellung neben der Komponentenform ist die Euler'sche Form. Dabei wird die komplexe Zahl in Betrag und Phase zerlegt.



Dieser Zeiger ist **kein** Vektor; er unterliegt anderen Rechengesetzen (siehe Multiplikation komplexer Zahlen).

Der Betrag ist die Länge des Zeigers und wird mit Hilfe des Satzes von Pythagoras berechnet:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{[\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}]^2 + [\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}]^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5{,}83$$

Der Winkel φ wird mit dem Tangens berechnet:

$$\tan(\varphi) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}} = \frac{3}{5} = 0{,}6$$
$$\Leftrightarrow \varphi = \arctan(0{,}6) \approx 30{,}96°$$

Die Zahl $\underline{Z}$ sieht nach der Euler'schen Darstellung wie folgt aus: $\underline{Z} = 5{,}83 \cdot e^{j30{,}96°}$.

Als letzte Darstellungsform gibt es die trigonometrische Form, die sich an die Komponentenform anlehnt. Diese Darstellung dient zur Umrechnung von der Euler'schen Form in die Komponentenform und hat folgende Schreibweise:

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \cdot [\cos(\varphi) + j \cdot \sin(\varphi)] = 5{,}83 \cdot [\cos(30{,}96°) + j \cdot \sin(30{,}96°)] = 5{,}83 \cdot (0{,}857 + j \cdot 0{,}514) = 5 + j \cdot 3$$

Für weitere Berechnungen wird diese Form allerdings nicht verwendet. Für bestimmte Berechnungen hat die Komponentenform, für andere die Euler'sche Form Vorteile. Das Addieren und Subtrahieren erfolgt mit Hilfe der Komponentenform, das Multiplizieren, Dividieren sowie Radizieren in der Euler'schen Form.

Für den Term $j = \sqrt{-1}$ ergeben sich folgende Zusammenhänge:

$$j = \sqrt{-1} = 1 \cdot e^{j90°}$$
$$j^2 = j \cdot j = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 = 1 \cdot e^{j180°} ; \quad \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \neq +1$$
$$j^3 = j \cdot j \cdot j = j^2 \cdot j = -j = 1 \cdot e^{-j90°}$$
$$j^4 = j \cdot j \cdot j \cdot j = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 = 1 \cdot e^{j0°}$$
$$j^5 = j \cdot j \cdot j \cdot j \cdot j = j \cdot j^4 = j$$

usw...

$$\frac{1}{j} = \frac{j}{j} \cdot \frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = \frac{j}{-1} = -j$$

Weiterhin gibt es noch die konjugiert komplexe Zahl $\underline{Z}^*$. Existiert eine komplexe Zahl $\underline{Z} = x + j \cdot y$, so lautet die konjugiert komplexe Zahl $\underline{Z}^* = x - j \cdot y$, also einfach nur ein Vorzeichenwechsel des Imaginärteils. Damit gilt auch $\underline{Z} \cdot \underline{Z}^* = x^2 + y^2$.

Allgemeine Rechenregeln mit komplexen Zahlen:

$\underline{Z}_1 = -2 + j \cdot 5$ und $\underline{Z}_2 = 5 - j \cdot 4$

Um die weitere Darstellung zu vereinfachen werden die Zahlen $\underline{Z}_1$ und $\underline{Z}_2$ allgemein dargestellt:

$\underline{Z}_1 = x_1 + j \cdot y_1$ und $\underline{Z}_2 = x_2 + j \cdot y_2$

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 = (x_1 + j \cdot y_1) + (x_2 + j \cdot y_2) = x_1 + x_2 + j \cdot (y_1 + y_2) = -2 + 5 + j \cdot (5 - 4)$$
$$\Leftrightarrow \underline{Z}_A = 3 + j$$

$$\underline{Z}_S = \underline{Z}_1 - \underline{Z}_2 = (x_1 + j \cdot y_1) - (x_2 + j \cdot y_2) = x_1 - x_2 + j \cdot (y_1 - y_2) = -2 - 5 + j \cdot (5 + 4)$$
$$\Leftrightarrow \underline{Z}_S = -7 + j \cdot 9$$

$$\underline{Z}_M = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = (x_1 + j \cdot y_1) \cdot (x_2 + j \cdot y_2) = x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot j \cdot y_2 + j \cdot y_1 \cdot x_2 + j \cdot y_1 \cdot j \cdot y_2$$
$$= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + j \cdot (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) = (-10 + 20) + j \cdot (8 + 25)$$
$$\Leftrightarrow \underline{Z}_M = 10 + j \cdot 33$$

Das Multiplizieren geht aber wesentlich einfacher mit der Euler'schen Form. Allerdings muss man die komplexen Zahlen erst einmal in die Euler'sche Form umwandeln:

$\underline{Z}_1 = -2 + j \cdot 5$ damit ergibt sich der Betrag zu $\left|\underline{Z}_1\right| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} \approx 5{,}38$

und der Winkel zu $\varphi_1 = \arctan\left(\frac{5}{-2}\right) = \arctan(-2{,}5) \approx 111{,}80°$

$\underline{Z}_2 = 5 - j \cdot 4$ damit ergibt sich der Betrag zu $\left|\underline{Z}_2\right| = \sqrt{5^2 + (-4)^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}40$

und der Winkel zu $\varphi_2 = \arctan\left(\frac{-4}{5}\right) = \arctan(-0{,}8) \approx -38{,}66°$

$$\underline{Z}_M = \underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_2 = \left|\underline{Z}_1\right| \cdot \left|\underline{Z}_2\right| \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = 5{,}38 \cdot 6{,}40 \cdot e^{j(110{,}80° - 38{,}66°)}$$
$$\Leftrightarrow \underline{Z}_M = 34{,}48 \cdot e^{j73{,}14°}$$

zum Vergleich mit dem Ergebnis von $\underline{Z}_M$:

$\left|\underline{Z}_M\right| = \sqrt{10^2 + 33^2} = \sqrt{1189} \approx 34{,}48$ und $\varphi_M = \arctan\left(\frac{33}{10}\right) = \arctan(3{,}3) \approx 73{,}14°$

Das Dividieren sollte nach Möglichkeit nur in der Euler'schen Form erfolgen.

$$\underline{Z}_D = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2} = \frac{x_1 + j\cdot y_1}{x_2 + j\cdot y_2} = \frac{|\underline{Z}_1|\cdot e^{j\varphi_1}}{|\underline{Z}_2|\cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|}\cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{5{,}38\cdot e^{j111{,}80°}}{6{,}40\cdot e^{-j38{,}66°}} = \frac{5{,}38}{6{,}40}\cdot e^{j(111{,}80°+38{,}66°)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_D = 0{,}84\cdot e^{j150{,}46°}$$

Das Radizieren geht wie folgt:

$$\underline{Z}_R = \sqrt[4]{3 - j\cdot 4} \Leftrightarrow \underline{Z}_R^{\ 4} = 3 - j\cdot 4 = 5\cdot e^{-j53{,}13°}$$

nach den Gesetzen des Radizierens gilt: $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ und $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

also dementsprechend: $\underline{Z}_R = \sqrt[4]{5\cdot e^{-j53{,}13°}} = \sqrt[4]{5}\cdot\sqrt[4]{e^{-j53{,}13°}} = \sqrt[4]{5}\cdot e^{\frac{1}{4}(-j53{,}13°)} = 1{,}49\cdot e^{-j13{,}28°}$

Dies ist allerdings nur eine Lösung für $\underline{Z}_R$, denn eine Gleichung 4. Grades hat vier Lösungen. Der Zeiger $\underline{Z}_R$ ist nach einer Drehung von 360° wieder an seiner ursprünglichen Lage. Man teilt die 360° durch den Exponenten von $\underline{Z}_R$ – hier also 4 – und erhält die anderen drei Winkel.

$$\begin{aligned} 360° : 4 = 90° \quad &\Rightarrow \underline{Z}_0 = 1{,}49\cdot e^{-j13{,}28°} \\ &\Rightarrow \underline{Z}_1 = 1{,}49\cdot e^{j76{,}72°} \\ &\Rightarrow \underline{Z}_2 = 1{,}49\cdot e^{j166{,}72°} \\ &\Rightarrow \underline{Z}_3 = 1{,}49\cdot e^{-j103{,}28°} \end{aligned}$$

Ganz allgemein gilt für das Radizieren:

$$\underline{Z}^n = x + j\cdot y \Leftrightarrow \underline{Z}_k = \sqrt[n]{|\underline{Z}|}\cdot e^{\frac{1}{n}j(\varphi + 2\pi\cdot k)} \quad \text{für } k = 0,1,...,n-1$$

auf dieses Beispiel angewendet:

$$k = 0 \rightarrow \underline{Z}_0 = \sqrt[4]{5}\cdot e^{\frac{1}{4}j(-53{,}13°+360°\cdot 0)} = 1{,}49\cdot e^{-j13{,}28°}$$

$$k = 1 \rightarrow \underline{Z}_1 = \sqrt[4]{5}\cdot e^{\frac{1}{4}j(-53{,}13°+360°\cdot 1)} = 1{,}49\cdot e^{j76{,}72°}$$

$$k = 2 \rightarrow \underline{Z}_2 = \sqrt[4]{5}\cdot e^{\frac{1}{4}j(-53{,}13°+360°\cdot 2)} = 1{,}49\cdot e^{j166{,}72°}$$

$$k = 3 \rightarrow \underline{Z}_3 = \sqrt[4]{5}\cdot e^{\frac{1}{4}j(-53{,}13°+360°\cdot 3)} = 1{,}49\cdot e^{-j103{,}28°}$$

Die Darstellung der letzen Winkelgröße (-103,28°) rührt daher, dass man bei komplexen Zahlen keine Winkel größer als 180° angibt. Daraus resultiert folgende Tabelle:

$$\underline{Z} = x + j \cdot y$$

Quadrant	x > 0 und y > 0 I. Quadrant	x < 0 und y > 0 II. Quadrant	x < 0 und y < 0 III. Quadrant	x > 0 und y < 0 IV. Quadrant
φ	$0° \le \varphi \le 90°$	$90° \le \varphi \le 180°$	$-180° \le \varphi \le -90°$	$-90° \le \varphi \le 0°$

Hat man einen komplexen Bruch, so kann man ihn nach Realteil und Imaginärteil, bzw. nach Betrag und Phase auflösen. Dazu geht man wie folgt vor:

1. Realteil und Imaginärteil

$$\underline{Z} = \frac{x_1 + j \cdot y_1}{x_2 + j \cdot y_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

$$\underline{Z} = \frac{x_1 + j \cdot y_1}{x_2 + j \cdot y_2} \cdot \underbrace{\frac{x_2 - j \cdot y_2}{x_2 - j \cdot y_2}}_{\substack{\text{konjugiert}\\ \text{komplexe}\\ \text{Erweiterung}}} = \underbrace{\frac{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}} + j \cdot \underbrace{\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}_{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}$$

2. Betrag und Phase

$$\underline{Z} = \frac{x_1 + j \cdot y_1}{x_2 + j \cdot y_2} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}$$

$$|\underline{Z}| = \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}} = \frac{|\underline{Z}_1|}{|\underline{Z}_2|} \quad \text{oder}$$

$$|\underline{Z}| = \sqrt{[\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}]^2 + [\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}]^2} = \sqrt{\left[\frac{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right]^2 + \left[\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right]^2}$$

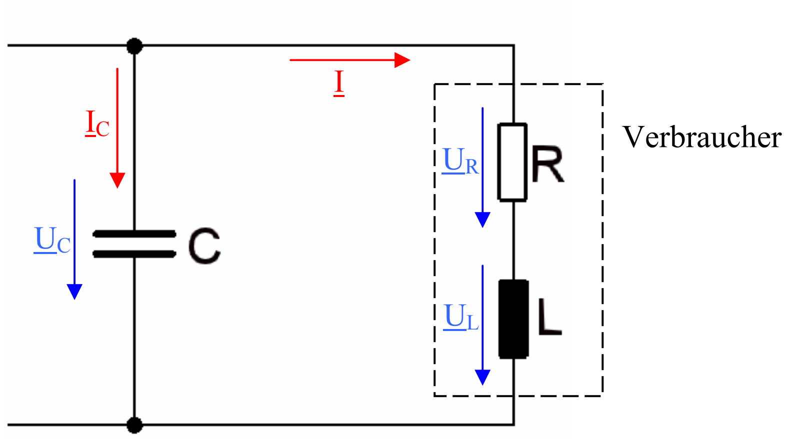
für das Argument φ benötigt man allerdings Realteil und Imaginärteil:

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}\{\underline{Z}\}}{\mathrm{Re}\{\underline{Z}\}}\right) = \arctan\left(\frac{\dfrac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}{\dfrac{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2}}\right) = \arctan\left(\frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2}\right)$$

Mal ein konkretes Beispiel:

Es kommt bei elektrischen Verbrauchern (Motoren, Leuchtstofflampen, usw.) vor, dass sie als Last nicht nur einen Widerstand, sondern auch eine Spule darstellen. Diese Spule verursacht eine Phasenverschiebung zwischen Gesamtstrom und –spannung, wodurch die Wirkleistung sinkt. Die Berechnung hierfür lautet: $P = |\underline{U}_R| \cdot |\underline{I}| \cdot \cos(\varphi)$. Bei $\varphi = 0°$ ist $\cos(\varphi) = 1$; die Wirkleistung P ist hier am größten. Existiert eine Phasenverschiebung, so ist $\cos(\varphi)$ kleiner 1 und die Wirkleistung nimmt ab.

Umgehen kann man dies, in dem man einen Kondensator (zur Blindstromkompensation) parallel dazu einsetzt (auch Kompensation induktiver Blindleistung genannt). Der Verbraucher entspricht einer Reihenschaltung aus einem Widerstand R und einer Spule L. Parallel dazu liegt der Kondensator C zur Kompensation.



An dieser Stelle wird nicht näher auf den Zusammenhang zwischen sinusförmiger Spannung und Strom an den Bauelementen R, L und C eingegangen (Verweis auf das Tutorium Elektrotechnik). Da bei der Spule die Spannung dem Strom um 90° voreilt, drückt man das durch ein j aus; beim Kondensator eilt die Spannung 90° dem Strom nach, also –j. Allgemein gilt für die Impedanz (Scheinwiderstand, oder auch Gesamtwiderstand) : $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$ (das Z hier steht für die Impedanz). Für die Impedanzen folgt dann nach komplexer Schreibweise:

$$\underline{Z}_R = \frac{\underline{U}_R}{\underline{I}} = R$$

$$\underline{Z}_L = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}} = j \cdot X_L = j \cdot \omega \cdot L$$

$$\underline{Z}_C = \frac{\underline{U}_C}{\underline{I}_C} = -j \cdot X_C = \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}$$

Demzufolge gilt für die Parallelschaltung aus $\underline{Z}_R + \underline{Z}_L$ und $\underline{Z}_C$:

$$\underline{Z} = \frac{(\underline{Z}_R + \underline{Z}_L) \cdot \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \frac{(R + j \cdot \omega \cdot L) \cdot \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}{R + j \cdot \omega \cdot L + \frac{1}{j \cdot \omega \cdot C}}$$

Um nur den Blindstrom (Blindleistung) zu kompensieren, muss man die Größe des Imaginärteils von $\underline{Z}$ berechnen. Die Rechnung sieht wie folgt aus:

$$\underline{Z} = \frac{(R + j\cdot\omega\cdot L)\cdot\frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}}{R + j\cdot\omega\cdot L + \frac{1}{j\cdot\omega\cdot C}} = \frac{\frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C} - j\cdot\frac{R}{\omega\cdot C}}{R + j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)} = \frac{\frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C} - j\cdot\frac{R}{\omega\cdot C}}{R + j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)} \cdot \underbrace{\frac{R - j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)}{R - j\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)}}_{\text{konjugiert komplexe Erweiterung}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\frac{R}{(\omega\cdot C)^2}}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2} - j\cdot\frac{\frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C}\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) + \frac{R^2}{\omega\cdot C}}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2}$$

Um die Blindleistung zu kompensieren, muss der Imaginärteil gleich Null sein. Also:

$$\operatorname{Im}\{\underline{Z}\} = 0 \Leftrightarrow \frac{\frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C}\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) + \frac{R^2}{\omega\cdot C}}{R^2 + \left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C}\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) + \frac{R^2}{\omega\cdot C} = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega\cdot L\cdot\left(\omega\cdot L - \frac{1}{\omega\cdot C}\right) + R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega\cdot L)^2 - \frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C} + R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\omega\cdot L)^2 + R^2 = \frac{\omega\cdot L}{\omega\cdot C}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega\cdot C}{\omega\cdot L} = \frac{1}{(\omega\cdot L)^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow \omega\cdot C = \frac{\omega\cdot L}{(\omega\cdot L)^2 + R^2}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{L}{(\omega\cdot L)^2 + R^2}$$

Mit dieser Formel und allen bekannten Werten für R, L und ω kann der Kondensator C berechnet werden.