1. Definitionsbereich

Zuerst bestimmt man den Definitionsbereich D von x, für den die Funktion $f(x)$ definiert ist.

Das bedeutet: 1) für ganzrationale Funktionen ist $D = \Re$
2) für gebrochene Funktionen sind die Nullstellen des Nenners auszuschließen
3) für Wurzelfunktionen sind die Bereiche mit negativen Werten unter der Wurzel (Radikand) auszuschließen, ebenso gilt das für Logarithmusfunktionen

Beispiel:

$$f(x) = 2x \cdot e^x \qquad D = \Re$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 2}{x - 4} \qquad D = \Re^{\neq 4}$$

$$f(x) = \frac{4x - 2}{3x^2 + 4x} \qquad D = \Re \setminus \{-\tfrac{4}{3}, 0\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \qquad D = \Re \setminus \left\{x \middle| x \leq 1\right\}$$

$$f(x) = \ln(x) \qquad D = \Re^{>0}$$

2. Symmetrie

Mit der Symmetrie gibt man an, ob eine Funktion gerade oder ungerade ist, und ob sie überhaupt symmetrisch ist.
Gerade bedeutet, dass die Funktion symmetrisch zur Y−Achse ist, ungerade dagegen, dass sie punktsymmetrisch zum Ursprung − dem Nullpunkt − ist.

Definition:

gilt $f(-x) = f(x)$, so ist die Funktion achsensymmetrisch

gilt $f(-x) = -f(x)$, so ist die Funktion punktsymmetrisch

Beispiel:

Es ist zu untersuchen, ob die Funktion f zu $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ gerade oder ungerade ist.

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1 = f(x)$$

Hier gilt die Bedingung $f(-x) = f(x)$, somit ist die Funktion achsensymmetrisch.

3. Verhalten im Unendlichen

Der Grenzwert einer Funktion für x strebt gegen ±Unendlich wird untersucht.

Beispiele:

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^3-2x^2+1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x-2+\frac{4x-7}{x^2-4}$, das bedeutet, die Grenzkurve ist eine Gerade mit der Gleichung $y = x-2$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin(x) \to$ kein festes Verhalten für $x \to \pm\infty$, aber die Funktion hat die Periode 2π, denn es gilt $\sin(x+2\pi\cdot k) = \sin(x)$ mit $k \in Z$

Hilfestellung:

den Term $\frac{x^3-2x^2+1}{x^2-4}$ mittels Polynomdivision aufspalten:

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3-2x^2+1\right):\left(x^2-4\right) = x-2+\frac{4x-7}{x^2-4} \\
-\underline{\left(x^3-4x\right)} \\
\quad \% -2x^2+4x \\
\quad -\underline{\left(-2x^2+8\right)} \\
\qquad \% +4x-8+1 = 4x-7
\end{array}
$$

4. Grenzwert

Grenzwerte zeigen das Verhalten einer Funktion an, wenn sie gegen eine Zahl $x = x_0$ läuft. Dabei gibt es mehrere Varianten:

der Grenzwert strebt gegen Null;
der Grenzwert strebt gegen ± Unendlich;
der Grenzwert strebt auf eine Gerade g;
der Grenzwert strebt gegen einen Punkt $P(x, y)$;

Definition:

Grenzwert der Funktion f an der Stelle $x = x_0$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$, wobei x_0 eine bestimmte Zahl ist.

Weiterhin gilt: $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f_1(x)\pm f_2(x)\right]=g_1\pm g_2$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f_1(x)\cdot f_2(x)\right]=g_1\cdot g_2$$

$\lim\limits_{x\to x_0}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]=\frac{g_1}{g_2}$, wobei $g_2\neq 0$ sein muss!

Beispiel:

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=\infty$ Man nennt die Stelle $x=0$ eine Unendlichkeitsstelle (Polstelle) der Funktion.

$l-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=-\infty$ und $r-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$ Diese Stelle $x=0$ bezeichnet man hier als Polstelle mit Vorzeichenwechsel, da sich der linksseitige Grenzwert vom rechtsseitigen unterscheidet.

$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=„\frac{0}{0}"$, daraus ergibt sich nach der **Regel de l'Hopital**: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x}{1}=2$

die **Regel von de l'Hopital** lautet: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

5. Stetigkeit

Die Stetigkeit ist eine Erweiterung des Grenzwertbegriffes, man benötigt die Stetigkeit um damit die Differenzierbarkeit (d.h. die Ableitung [=Steigung]) geltend zu machen.

Definition:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x_0)=f(x)$, das bedeutet, dass der linsseitige und der rechtsseitige Grenzwert gleich dem Funktionswert sind.

Beispiel:

$$\lim_{h\to 0}\sin(x+h)=\lim_{h\to 0}\left[\underbrace{\sin(x)}_{\sin(x)}\cdot\underbrace{\cos(h)}_{1}+\underbrace{\sin(h)}_{0}\cdot\underbrace{\cos(x)}_{\cos(x)}\right]=\sin(x)$$

6. Monotonie

Die Monotonie gibt an, ob eine Funktion f in einem Intervall [a ; b] (streng) monoton steigt oder (streng) monoton fällt. Ist die Funktion steigend, so liegen die Funktionswerte der 1. Ableitung alle im positiven Y–Bereich, fällt sie, so liegen die Funktionswerte der 1. Ableitung im negativen Bereich.

Definition:

$x_1 < x_2$ und $f(x_1) < f(x_2)$ $\Rightarrow$ streng monoton steigend $\Rightarrow f'(x) > 0$

$x_1 < x_2$ und $f(x_1) \leq f(x_2)$ $\Rightarrow$ monoton steigend $\Rightarrow f'(x) \geq 0$

$x_1 < x_2$ und $f(x_1) > f(x_2)$ $\Rightarrow$ streng monoton fallend $\Rightarrow f'(x) < 0$

$x_1 < x_2$ und $f(x_1) \geq f(x_2)$ $\Rightarrow$ monoton fallend $\Rightarrow f'(x) \leq 0$

Beispiel:

Es ist zu untersuchen, ob und gegebenenfalls über welchen Bereich die Funktion f zu $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$ (streng) monoton steigend ist.

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 4$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 6 = 3 \cdot \left(x^2 - 2x + 2\right) = 3 \cdot (x-1)^2 + 3$$

Nun gilt aber für alle $x \in \Re$: $3 \cdot (x-1)^2 + 3 > 0$, also $f'(x) > 0$. Somit ist die Funktion **streng** monoton steigend über $\Re$.

7. Nullstellen

Nullstellen einer Funktion, d.h. $f(x) = 0$

Beispiel:

wo hat die folgende Funktion $f(x)$ ihre Nullstellen?

$$f(x) = \frac{3x - x^2}{4x^3 - 2} = 0 \Leftrightarrow 3x - x^2 = 0 \Leftrightarrow x \cdot (3 - x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 3$$

$f(x) = 3 - 2 \cdot \sin(x) = 0$ hier gibt es keine Nullstellen, da der Term $2 \cdot \sin(x)$ für alle x nie den Wert 3 annimmt

$$f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \text{ und } k \in Z$$

8. Extremwerte

Extremwerte geben an, ob eine Funktion f an einer Stelle $x = x_0$ einen Hochpunkt (Maximum) oder Tiefpunkt (Minimum) besitzt. Der Nachweis wird über die zweite Ableitung durchgeführt.

Definition:

$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Extremwert

und

$f''(x) < 0 \quad \rightarrow \quad$ Maximum

$f''(x) > 0 \quad \rightarrow \quad$ Minimum

Beispiel:

$$f(x) = 2 - (x-3)^2$$
$$\Rightarrow f'(x) = -2 \cdot (x-3) = -2x + 6$$
$$\Rightarrow f''(x) = -2$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \qquad \text{Extremwert bei } x = 3$$

$$f''(3) = -2 < 0$$

Maximum mit den Koordinaten H(3;2)

9. Wendepunkte

Wendepunkte geben an, an welcher Stelle $x = x_0$ der Graph von einer konkaven zu einer konvexen Krümmung übergeht oder umgekehrt. Der Nachweis erfolgt mit Hilfe der zweiten Ableitung.

Definition:

$f''(x) = 0 \quad \rightarrow \quad$ Wendepunkt

und

$f'''(x) \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ zwingend für den Wendepunkt

Beispiel:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$$
$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$\Rightarrow f''(x) = 6x - 6$$
$$\Rightarrow f'''(x) = 6 \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1 \qquad \text{Wendepunkt bei } x = 1$$

Wendepunkt mit den Koordinaten W(1;4)

Ein Beispiel für eine Kurvendiskussion:

Diskutiere die Funktion f für die gilt: $f(x) = \dfrac{x^2+3}{x-1}$

1. **Definitionsbereich**

   Für diese Funktion darf der Nenner nicht Null sein, d.h. $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ demzufolge ist $D = \Re^{\neq 1}$

2. **Symmetrie**

   $$f(-x) = \frac{(-x)^2+3}{(-x)-1} = \frac{x^2+3}{-x-1} \neq -f(x) \neq f(x)$$

   Die Funktion ist weder punkt– noch achsensymmetrisch

3. **Verhalten im Unendlichen**

   $$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x+1+\frac{4}{x-1}\right) \quad \text{(Polynomdivision)}$$

   Die Asymptote ist eine Gerade g mit $g(x) = x+1$

4. **Grenzwert**

   Diese Funktion besitzt eine Polstelle an der Stelle $x_0 = 1$, die man noch genauer untersuchen muss

   $$1-\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1} = -\infty \quad \text{und} \quad r-\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3}{x-1} = +\infty$$

   Linksseitiger Grenzwert ist nicht gleich rechtsseitigem Grenzwert, d.h. an der Stelle $x_0 = 1$ existiert eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel

5. **Stetigkeit**

   $$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3}{x+h-1} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2+3}{x+h-1} = \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{x^2}{x-1}}_{=\frac{x^2}{x-1}} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{2xh}{x-1}}_{0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{x-1}}_{0} + \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{3}{x-1}}_{\frac{3}{x-1}} = \frac{x^2+3}{x-1}$$

   Die Funktion ist an jeder Stelle x stetig (differenzierbar), d.h. es existieren keine Sprünge, etc.

6. **Monotonie**

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2}$$

Es ist also zu untersuchen, wann der Term $\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2}$ positiv, bzw. negativ ist (siehe Definition Monotonie). Dafür reicht es den Zäher Null zu setzen, weil der Nenner immer positiv ist:

$$(x-3)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=3 \quad \vee \quad x_2=-1$$

Man kann erkennen, dass für $x<-1$ der Faktor $(x+1)$ negativ wird, der Faktor $(x-3)$ negativ bleibt. Die Multiplikation beider Faktoren gibt ein positives Produkt, d.h. für den Bereich $-\infty<x<-1$ ist die Funktion streng monoton steigend. Ebenso ist es für $x>3$: der Faktor $(x-3)$ wird positiv, der Faktor $(x+1)$ bleibt positiv. Auch hier ist die Funktion im Intervall $3<x<+\infty$ streng monoton steigend.
Für den Bereich $-1<x<3$ ist die Funktion streng monoton fallend, weil der Term $(x-3)$ für diesen Bereich negativ bleibt.

7. **Nullstellen**

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3}{x-1}=0 \Leftrightarrow x^2+3=0$$

das ist für alle $x\in\Re$ nicht möglich, die Funktion besitzt keine Nullstellen

8. **Extremwerte**

$$f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2}=1-\frac{4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x)=\frac{8x-8}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow (x-3)\cdot(x+1)=0 \Leftrightarrow x_1=-1 \quad \vee \quad x_2=3$$

$$f''(-1)=-1<0$$
$$f''(3)=1>0$$

Hochpunkt H (-1;-2) und Tiefpunkt T (3;6)

9. **Wendepunkte**

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)\cdot(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2-4}{(x-1)^2} = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{8x-8}{(x-1)^4}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{-24}{(x-1)^4}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{8x-8}{(x-1)^4} \Leftrightarrow 8x-8=0 \Leftrightarrow x=1$$

$f''(1)$ ist zwar nicht definiert, allerdings ungleich Null. Damit $f''(x)=0$ wird, muss der Zähler Null werden. Dort steht allerdings eine Konstante Zahl ungleich Null, damit Wendepunkt an der Stelle $x=1$

Diskutiere die Funktion f für die gilt: $f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)}$

1. **Definitionsbereich**

   Der Nenner kann niemals Null werden, daher gilt: $D = \Re$

2. **Symmetrie**

   $$f(-x) = \frac{3 \cdot \sin(-x)}{2 - \sin(-x)} = -\frac{3 \cdot \sin(x)}{2 + \sin(x)} \neq -f(x) \neq f(x)$$

   Die Funktion weder punkt– noch achsensymmetrisch

3. **Verhalten im Unendlichen**

   $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)} \to$ kein festes Verhalten für $x \to \pm\infty$, $f(x + 2\pi \cdot k) = f(x)$ mit $k \in Z$ Beide Terme haben die Periode 2π, damit hat auch die Funktion die Periode 2π

4. **Grenzwert**

   der Nenner kann niemals Null werden, die Funktion besitzt keine Polstellen

5. **Stetigkeit**

   $$\lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot \sin(x+h)}{2 - \sin(x+h)} = \lim_{h \to 0} \frac{3 \cdot [\sin(x) \cdot \cos(h) - \sin(h) \cdot \cos(x)]}{2 - [\sin(x) \cdot \cos(h) - \sin(h) \cdot \cos(x)]} = \frac{3 \cdot [\sin(x) \cdot 1 - 0 \cdot \cos(x)]}{2 - [\sin(x) \cdot 1 - 0 \cdot \cos(x)]} = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)}$$

   Die Funktion ist an jeder Stelle x stetig (differenzierbar), d.h. es existieren keine Sprünge, etc.

6. **Monotonie**

   $$f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{6 \cdot \cos(x)}{[2 - \sin(x)]^2}$$

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k - 1)$ mit $k \in Z$ Für $x < \frac{\pi}{2}$ ist der Zähler positiv, der Nenner bleibt immer positiv, d.h. die Funktion $f(x)$ ist streng monoton steigend. Für $\frac{1}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ ist der Zähler negativ, also $f(x)$ streng monoton fallend. Zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und 2π ist die Funktion wieder streng monoton steigend, weil $f'(x) > 0$.

7. **Nullstellen**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)} = 0 \Leftrightarrow 3 \cdot \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k \cdot \pi \text{ mit } k \in Z^{\neq 0}$$

8. **Extremwerte**

$$f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6 \cdot \cos(x)}{[2 - \sin(x)]^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6 \cdot \sin^3(x) - 36 \cdot \sin(x) + 24}{[2 - \sin(x)]^4}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \cos(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \cdot (2 \cdot k - 1) \text{ mit } k \in Z^{\neq 0}$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\pi\right) = -6 < 0$$

$$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \frac{2}{3} > 0$$

Hochpunkt $H\left(\frac{1}{2}\pi; -6\right)$ und Tiefpunkt $T\left(\frac{3}{2}\pi; \frac{2}{3}\right)$

9. **Wendepunkte**

$$f(x) = \frac{3 \cdot \sin(x)}{2 - \sin(x)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{6 \cdot \cos(x)}{[2 - \sin(x)]^2}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{6 \cdot \sin^3(x) - 36 \cdot \sin(x) + 24}{[2 - \sin(x)]^4}$$

$$\Rightarrow f'''(x) = \frac{6 \cdot \cos(x) \cdot [\sin^3(x) + 6 \cdot \sin^2(x) - 18 \cdot \sin(x) + 4]}{[2 - \sin(x)]^5}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{6 \cdot \sin^3(x) - 36 \cdot \sin(x) + 24}{[2 - \sin(x)]^4} = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot \sin^3(x) - 36 \cdot \sin(x) + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin(x) = -\sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow x \approx \frac{\pi}{1,354}$$

$$f''\left(\frac{\pi}{1{,}354}\right) = 6{,}94 \neq 0$$

Wendepunkt $W\left(\frac{\pi}{1{,}354}; \sqrt{3}\right)$